



Impact de goutte sur une surface solide

Julien Philippi

► To cite this version:

Julien Philippi. Impact de goutte sur une surface solide. Mécanique [physics]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2015. Français. NNT : 2015PA066472 . tel-01232688v2

HAL Id: tel-01232688

<https://hal.science/tel-01232688v2>

Submitted on 25 Mar 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Spécialité : Mécanique

**École Doctorale de Sciences Mécaniques, Acoustique, Électronique et
Robotique de Paris (SMAER)**

Présentée par

Julien PHILIPPI

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Impact de goutte sur une surface solide

dirigée par Arnaud ANTKOWIAK et Pierre-Yves LAGRÉE

à l'Institut Jean le Rond d'Alembert

Soutenue à l'UPMC le 30 septembre 2015 devant le jury composé de :

Arnaud ANTKOWIAK, Maître de conférence, UPMC	Directeur de thèse
Laurent DUCHEMIN, Maître de conférence, Aix-Marseille Univ.	Examineur
Marco FONTELOS, Professeur, Univ. Carlos III de Madrid	Rapporteur
Philippe GONDRET, Professeur, Univ. Paris-Sud	Examineur
Pierre-Yves LAGRÉE, Directeur de recherche, UPMC	Directeur de thèse
Laurent LIMAT, Directeur de recherche, Univ. Paris Diderot	Rapporteur
Stéphane ZALESKI, Professeur, UPMC	Examineur

Remerciements

Mon séjour à l'Institut Jean le Rond ∂ 'Alembert touche à sa fin et il va être bientôt temps pour moi de m'envoler vers d'autres cieux. J'ai eu la chance de rencontrer dans ce laboratoire de nombreuses personnes qui m'auront marqué et qui auront contribué à rendre mon séjour à ∂ 'Alembert aussi agréable qu'enrichissant. Je souhaiterais pouvoir leur exprimer ici toute ma gratitude.

Je voudrais tout d'abord remercier très chaleureusement Arnaud et Pierre-Yves. Travailler avec eux pendant ces quatre années a été pour moi un très grand bonheur. Ils m'ont l'un et l'autre énormément apporté et m'ont fait partager leur enthousiasme pour la recherche. Je voudrais particulièrement remercier Arnaud pour m'avoir proposé de travailler sur ce problème magnifique lors de mon stage de Master 2. Il a également contribué de manière significative à me donner une vision beaucoup plus globale de nombreux problèmes de Physique au travers de nos nombreuses discussions et m'a réconcilié avec *l'approche expérimentale* bien que je n'y ai eu moi-même que très peu recours durant cette thèse. Je voudrais particulièrement remercier Pierre-Yves, ami personnel de *l'opérateur de Laplace*, pour m'avoir accordé du temps dès le stage de Master 2 et pour être venu à *la recherche du log* avec moi. Il a depuis lors pris le temps de m'initier à l'analyse asymptotique et m'a montré les paysages merveilleux qui se cache derrière tous ces problèmes de *laplaciens*. Je voudrais également les remercier tous les deux pour m'avoir soutenu et encouragé dans les moments les plus difficiles. Nos discussions me manqueront beaucoup...

Je remercie ensuite l'ensemble des membres du jury : Philippe Gondret, Stéphane Zaleski, Laurent Duchemin ainsi que Laurent Limat et Marco Fontelos qui m'ont fait l'honneur de rapporter cette thèse (avec une pensée particulière pour Marco qui a accepté cette tâche alors que le manuscrit est majoritairement écrit en français). Je les remercie également pour leur disponibilité ainsi que pour les discussions à la fois agréables et enrichissantes que nous avons eu ensemble ces derniers mois.

Je remercie les thésards et les post-docs qui m'ont accompagné et qui ont partagé mon quotidien ces dernières années. Merci pour les moments de franches rigolades et pour ce que chacun aura pu m'apprendre au détour d'une conversation ou autour de la machine à café. Je pense en particulier à mes frères et soeurs de thèse (une belle bande de couillon!) Hervé (et Claudia), Bab, Aurélie, Paul, Xiaofei et Arthur ainsi qu'à mes co-bureaux (une autre belle bande de couillon!) Cansu, Luca, Gounséti et Valentina. Merci également à

tous les autres : mon poto Alex du MIT, Claude, Estelle, Charles, Raphaël, Geoffroy, Manu, Adrien, Léon, David, Ben, Vincent, Antoine, Zhen, Etienne, Claire, Omar, Diego, Raja, Chia, Jan, Christian, Nicolas, Stanley...

Je souhaite également remercier les permanents de ∂ 'Alembert avec qui j'ai pu interagir et qui m'ont beaucoup apporté que ce soit par l'intermédiaire de discussions scientifiques, de conseils, de suggestions ou tout simplement pour leur gentillesse et leur disponibilité : Christophe Josserand, Jérôme Hoepffner, Thomas Séon, Sébastien Neukirsh, Régis Wunnenburger, Pascal Ray, Stéphane Popinet, Daniel Fuster, Joël Frelat, Arnaud Lazarus, Anca Belme, Sergio Chibbaro, Jose-Maria Fullana, Joël Pouget...

Je remercie également Quentin Magdeleine avec qui j'ai eu l'occasion de travailler sur un très beau problème de coalescence de bulles lors de son stage à ∂ 'Alembert. Ce fût pour moi une collaboration très agréable et très enrichissante.

Au cours de ma dernière année j'ai eu l'opportunité de passer quelques mois très agréables au *Laboratory for Complex & Non-Newtonian Fluid Flow* de Vancouver. Je remercie Ian Frigaard et Neil Balmforth pour leur accueil chaleureux et pour tout ce qu'ils ont pu m'apprendre sur les fluides non-newtoniens. J'ai également été très bien accueilli par l'ensemble des thésards et post-docs du laboratoire : Charudatt (*my indian brother*), Mazi, Gaurav, Emad, Ida, Babak, Amir, Duncan, Ali... *Thank you all!*

Merci également à Frédéric Dias qui m'a reçu dans son groupe à Dublin lors de mon stage de Master 1. Cette première expérience de recherche a été très importante pour moi et m'a conforté dans mon envie de devenir chercheur. J'en garde un excellent souvenir.

Parce qu'il y a aussi une vie en dehors de l'université je voudrais remercier les amis de ma Provence natale que je retrouve avec toujours autant de bonheur (même si ce n'est pas aussi souvent que ce que j'aimerais...) : Arnaud, Seb, David, Laurent, Jérôme, Bruno et Vincent, Mimi, Juju et Titi et mes amis judokas Alvin, Nico, Kévin, Sandra et mon professeur Christian. Je remercie également mes partenaires du club de judo de Montrouge avec qui j'ai eu des bastons mémorables et avec qui j'ai beaucoup appris! Je pense notamment à Mathias (le *senseï*), Brian (et Reiko), J-B, Lionel, Manu, David, Président, Théo, Franck, Bruno, Vincent, Aude et Alex. Merci également à mes amis de l'ENS de Rennes et de Cachan : Jean-Paul, Jean-Baptiste, Seb, Joseph, Victor et Paul. Leur amitié à tous compte beaucoup pour moi.

Je voudrais finir par ce qui est à mes yeux le plus important en remerciant ma famille dans son ensemble. Je voudrais y associer également les familles Rigaud et Coissieux qui ne sont pas de mon sang mais qui font malgré tout partie des miens. Mes pensées vont en particulier à mes parents ainsi qu'à mes frères et sœur : *Guillaume, Aurore* et

Clément. Leur soutien tout au long de ma vie a été très précieux et je n'aurais jamais pu en arriver là sans eux. Ce manuscrit leur est dédié.

Résumé

Dans cette thèse nous nous intéressons au problème de l'impact d'une goutte sur une surface solide. Nous proposons pour cela de nous placer dans un cadre plus général en utilisant les analogies existantes avec d'autres problèmes d'impact *a priori* très différents. Dans la première partie de ce manuscrit nous proposons de revisiter le problème de l'impact de goutte pour les temps courts à la lumière de son problème dual à savoir l'impact d'un objet solide dans un bain liquide lorsque l'inertie est l'effet dominant. De cette analogie est déduit un modèle reposant sur la théorie des écoulements potentiels. L'analyse asymptotique nous permet par la suite de dégager à l'ordre dominant les mécanismes essentiels de ce problème puis nous mettons en évidence la structure autosimilaire des champs de pression et de vitesse induits par l'impact. La structure de la couche limite est également étudiée. Les prédictions théoriques issues de ce modèle sont comparées à des solutions numériques obtenues à l'aide du solveur des équations de Navier-Stokes *Gerris*. Nous étudions ensuite les temps intermédiaires de l'impact, correspondants au moment où la solution autosimilaire cesse d'être valide. A l'aide de nouvelles expériences numériques nous déterminons les causes de cette transition. Dans la troisième partie nous étudions un cas particulier d'évolution aux temps longs en revisitant le problème de l'impact d'une goutte sur un impacteur de taille comparable à celle-ci. Nous obtenons les solutions analytiques pour les champs de pression et de vitesse à l'instant initial à l'aide du concept de pression impulsionnelle et nous proposons ensuite différentes directions de recherche pour l'étude de l'évolution de la nappe liquide induite par l'impact. Nous finissons ce manuscrit par une brève introduction aux impacts de goutte de fluides de Bingham.

Mots-clés : Impact de goutte, Méthodes asymptotiques, Solutions autosimilaires, Simulations numériques, Couche limite, Cloches liquides, Fluides à seuil

Abstract

In this thesis we consider the problem of drop impact onto a solid surface. In order to study this phenomenon we consider a more general framework by using analogies with some other impact problems which are *a priori* very different. In the first part of the thesis we propose to revisit the inertia-dominated drop impact problem for short times at the light of the dual problem defined by the impact of a solid object onto a liquid bath. We deduce from this analogy a model based on potential flow theory. Then asymptotic analysis is used to determine the essential mechanisms of the problem at leading order. This approach reveal a self-similar structure both for the velocity field and the pressure field induced by the impact. The structure of the boundary layer is also studied. Theoretical predictions deduced from this model are compared with numerical solutions obtained with the Navier-Stokes multiphase flow solver *Gerris*. Then we study the impact for intermediates times which correspond to the period of the breakdown of the self-similar solution. The origin of the transition is determined by using new numerical experiments. In a third part we propose to study a particular case of long time evolution by revisiting the problem of drop impact onto a solid target matching its own size. We obtain analytical solutions for pressure and velocity fields at initial time by using pressure impulse theory and we propose few research directions for the study of the evolution of the liquid sheet induced by the impact. This thesis ends with a brief introduction to drop impact of Bingham fluids.

Keywords : Drop impact, Asymptotic methods, Self-similar solutions, Numerical simulations, Boundary layer, Water bells, Yield stress fluids

Table des matières

Remerciements	i
Table des matières	vi
1 Introduction	1
1.1 Généralités sur le problème de l’impact de goutte	1
1.1.1 Contexte	1
1.1.2 Quand la surface change, tout change	4
1.1.2.1 Impact sur une surface liquide	4
1.1.2.2 Impact sur une surface solide	5
1.2 Impact de goutte sur une surface solide indéformable	7
1.2.1 Effets compressibles	8
1.2.2 Influence de la viscosité	9
1.2.3 Influence des phénomènes capillaires	10
1.2.3.1 La tension de surface	10
1.2.3.2 Effets du nombre de Weber sur le comportement de la goutte	11
1.2.3.3 Angle de contact dynamique	12
1.2.4 Influence de l’air ambiant	14
1.2.4.1 Effet pré-impact : capture d’une bulle d’air	15
1.2.4.2 Effet post-impact : suppression du splashing	16
1.2.4.3 Corrélation des deux phénomènes	17
1.3 Temps courts	17
1.4 Les problèmes d’impact	22
1.4.1 Impact d’un solide sur une surface liquide	22
1.4.2 Aspects impulsionnels de l’impact	25
1.5 Méthodologie	27
1.6 Plan de la thèse	27
2 Solutions semblables aux temps courts	29
2.1 Introduction	29
2.2 Model	32
2.2.1 Theoretical framework & hypotheses	32
2.2.2 Governing equations and analogy with the water entry problem	33
2.2.2.1 Problem statement	33
2.2.2.2 Contact line motion : numerical observations	34
2.2.2.3 Analogy with the water entry problem	36

2.2.3	Leading-order description for the drop impact problem	37
2.3	Self-similar solutions and numerical simulations	41
2.3.1	A self-similar problem	41
2.3.2	Self-similar potential	42
2.3.3	Wagner condition and contact line dynamics	43
2.3.4	Analogy with the normal motion of an expanding disk in an infinite mass of liquid	45
2.3.5	Structure of the velocity field	46
2.3.5.1	Integral representation of the velocity field	46
2.3.5.2	Closed-formed expressions for the velocity field along the axis and the substrate	47
2.3.5.3	An unusual stagnation point flow	48
2.3.5.4	Beyond the stagnation point : a remark on the overall velocity field structure	49
2.3.5.5	Flow pattern, contact line bypass and Lamb analogy	49
2.3.6	Self-similar pressure	51
2.3.7	Normal force induced by drop impact	54
2.4	Matching with the viscous solution	56
2.4.1	A simple boundary layer problem ?	56
2.4.2	Approximation of the drop impact boundary layer via an analogy with shock-induced boundary layers	57
2.4.3	Estimation of the shear stress and the total drag	59
2.5	Discussion about some physical parameters	62
2.5.1	Influence of capillary phenomena	62
2.5.1.1	Influence of Weber number	62
2.5.1.2	Influence of dynamic contact angle	63
2.5.2	Influence of ambient air	63
2.5.2.1	Simulation with air entrapment	64
2.5.2.2	One last step : toward a unified theory encompassing ambient air	65
2.6	Main results and conclusion	66
2.6.1	Main results	66
2.6.2	To conclude	68
3	Dynamique aux temps intermédiaires : perte de similarité	70
3.1	Introduction	70
3.2	Modèle pour les temps intermédiaires	71
3.2.1	Cadre théorique et hypothèses	71
3.2.2	Candidats susceptibles d'être responsable de la perte de similarité	72
3.2.3	Modélisation du problème tenant compte des effets de confinement	73
3.2.3.1	Enoncé des équations régissant le problème	73
3.2.3.2	Solution analytique	75
3.2.3.3	Solutions numérique	75
3.3	Perspectives	80
3.3.1	Détermination théorique de $d(\tilde{t})$ sans approximation	80
3.3.2	Influence sur la force induite par la goutte sur le support	81
3.4	Conclusion	82

4	Dynamique en temps long : de l'impact de goutte vers les cloches liquides impulsioneelles	83
4.1	Introduction	83
4.1.1	Le problème de Rozhkov	83
4.1.2	Dispositif expérimental	85
4.2	Instants initiaux	88
4.2.1	Définition du problème impulsioneel	89
4.2.2	Modélisation	90
4.2.3	Détermination du champ de vitesse	91
4.2.4	Comportement du champ de vitesse	94
4.2.4.1	Vitesse de glissement	94
4.2.4.2	Structure de point d'arrêt	96
4.2.5	Quantité de mouvement perdue lors de l'impact	97
4.3	Etude post-impact	98
4.3.1	Effets visqueux	99
4.3.2	Etude de l'évolution de la nappe liquide	101
4.3.2.1	Détachement de la nappe liquide	101
4.3.2.2	Une nappe liquide pas comme les autres	102
4.3.2.3	Angle d'éjection	103
4.3.2.4	Caractéristiques géométriques de la cloche liquide	105
4.3.2.5	Epaisseur de la cloche liquide et écoulement au sein de la nappe	106
4.4	Conclusion	108
5	Brève introduction aux impacts de gouttes pour des fluides viscoplastiques	110
5.1	Introduction	110
5.1.1	Généralités sur les fluides viscoplastiques	110
5.1.2	Impact de gouttes	112
5.2	Modélisation basique du problème	114
5.2.1	Conservation de la quantité de mouvement	114
5.2.2	Discussion sur la validité de la théorie wagnérienne de l'impact de goutte	115
5.3	Influence du nombre de Bingham	116
5.3.1	Expériences numériques	116
5.3.2	Rayon maximal atteint	117
5.3.3	Cône de plasticité	118
5.4	Conclusion	120
6	Conclusion et perspectives	122
6.1	Principaux résultats	122
6.2	Perspectives	125
6.2.1	Problème aux temps intermédiaires	125
6.2.2	Effets de l'air	126
6.2.3	Impact de goutte pour des fluides à seuil	126
6.2.4	Impact sur solide mou	127

A Numerical simulations with the Gerris flow solver	129
A.1 Mesh convergence study	129
A.2 <i>Gerris</i> parameter file	131
A.3 Conclusion	133
B Influence of Reynolds number on short-time solutions	134
B.1 Inviscid solutions	134
B.2 Viscous solution	139
B.3 Conclusion	143
C Problèmes d’impact en deux dimensions	144
C.1 Resolution by complex analysis	144
C.2 Resolution by Fourier analysis	146
C.3 Resolution by boundary integral method	150
C.3.1 The boundary integral method	150
C.3.2 Application to half drop impact	151
C.4 Conclusion	152
D Solution du problème impulsionnel par la méthode des intégrales de frontières	154
D.1 Determination of the pressure impulse	154
D.2 Determination of the velocity along the substrate	156
D.3 Conclusion	157
Bibliographie	159

Chapitre 1

Introduction

1.1 Généralités sur le problème de l'impact de goutte

1.1.1 Contexte

L'impact de goutte est un phénomène qui nous semble très familier puisque nous y sommes confrontés à chaque fois que nous regardons tomber la pluie (Fig. 1.1(a)). En réalité ce genre d'évènement peut se retrouver plus souvent qu'on ne le croît dans la nature ou dans de très nombreuses applications industrielles et peut impliquer des échelles très différentes. A l'échelle micrométrique l'impact de goutte se retrouve dans la peinture en spray, l'impression jet d'encre ([van Dam et Le Clerc 2004](#)) ou encore dans les



FIGURE 1.1 – Quelques exemples d'impact de gouttes. (a) La pluie tombant sur le sol. (b) La peinture en spray utilise des gouttes de taille micrométrique pour recouvrir une surface. (c) Une goutte de pluie tombant sur un sol composé d'un matériau granulaire détache de fines particules (érosion). (d) Une goutte de pluie impactant une feuille peut propager des agents pathogènes sur ses voisines (figure 3 de [Gilet et Bourouiba \(2014\)](#)). (e) Application à la médecine légale : étude de tâches de sang sur une scène de crime. (f) Les impacts de météorites peuvent être modélisés comme des impacts de gouttes ([Melosh et Ivanov 1999](#)).



FIGURE 1.2 – Dessin dans la marge du folio 33r dans le codex Leicester de Léonard de Vinci (1508) qui remarque l’axisymétrie de l’empreinte d’une goutte ayant impacté une surface solide plane. Il remarque aussi l’existence de digitation radiale.

chambres de combustion des moteurs (Gavaises *et al.* 1996). Dans toutes ces situations il est crucial de bien comprendre les phénomènes mis en jeu de façon à pouvoir remplir un cahier des charges bien précis. A l’échelle millimétrique, dans certaines situations, ce phénomène est indésirable comme pour l’érosion des sols par la pluie (Furbish *et al.* 2007) ou avec la propagation de maladies chez les végétaux où une goutte de pluie peut en impactant une feuille propager des agents pathogènes sur les feuilles voisines (Gilet et Bourouiba 2014). En revanche dans certains autres cas l’impact de goutte peut fournir une aide précieuse comme pour le traitement des plantes avec des herbicides ou des pesticides. Dans ce genre de situation on souhaite maximiser la surface traitée et éviter les pertes à cause d’éventuels rebonds dûs à la faible mouillabilité des feuilles. On vient alors ajouter des polymères qui peuvent modifier de façon spectaculaire les comportements aux temps longs habituellement observés (Bergeron *et al.* 2000). On peut de cette façon supprimer le rebond voire même la phase de récession lors de l’étalement d’une goutte. Ces changements radicaux sont causés par des effets dit *non-newtoniens* qui induisent une modification de la façon dont le liquide réagit à une sollicitation en cisaillement. Ce type de problématiques est également posé en médecine légale pour l’étude des tâches de sang, qui est par ailleurs un fluide très particulier (Attinger *et al.* 2013; Brust *et al.* 2013; Laan *et al.* 2014). Au grandes échelles on retrouve de manière inattendue cette situation dans l’étude de l’impact de météorite qui peut être modélisé par un impact de goutte de fluide non-newtonien (Melosh et Ivanov 1999).

Bien que ce soit un phénomène relativement familier, l’impact de goutte n’en reste pas moins difficile à étudier. Au début du 16ème siècle, Léonard de Vinci remarque dans une marge du codex Leicester que l’empreinte apparaissant après l’impact d’une goutte sur un support solide a un motif axisymétrique (Fig. 1.2). Il note également l’existence de digitation radiale. Cependant ce phénomène étant par nature extrêmement bref puisqu’il se produit sur une durée de l’ordre de $3 \cdot 10^{-3}$ secondes pour une goutte millimétrique, il était extrêmement compliqué pour les contemporains de Léonard de Vinci d’en savoir plus. Il a fallu attendre le développement des outils numériques et des caméras rapides à la fin du vingtième siècle pour pouvoir être en mesure de faire des études sérieuses de ce

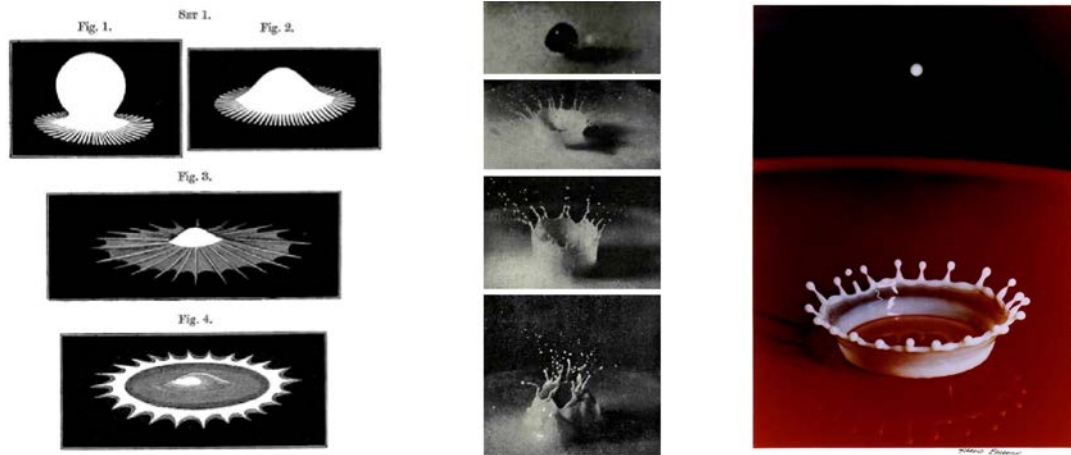


FIGURE 1.3 – Quelques travaux pionniers sur l’impact de goutte. (a) Set 1 issu de [Worthington \(1876\)](#) représentant l’impact d’une goutte de mercure tombant sur une plaque de verre. (b) Splash généré par l’impact d’une goutte d’eau colorée dans du lait ([Worthington et Cole 1897](#)) (c) *Corona splash* induit par une goutte de lait ayant impacté un film fin photographié par [Edgerton et Killian \(1954\)](#).

problème. La compréhension de ce phénomène n’a cessé de progresser depuis ([Thoroddsen et al. 2008](#); [Josserand et Thoroddsen 2016](#)). Les travaux pionniers sur le sujet ont été réalisés par [Worthington](#) qui, peu de temps après l’invention de la photographie et à l’aide de systèmes extrêmement ingénieux a pu réaliser les premières images capturant ce phénomène ([Worthington 1876](#); [Worthington et Cole 1897](#); [Worthington 1908](#)). Dans un premier temps il utilisait un système de flash pour figer l’image d’une goutte impactant un solide. Il dessinait ensuite de mémoire ce qu’il avait vu (Fig. 1.3(a)). Le flash était déclenché par une bille tombant en tandem avec la goutte. Cette méthode lui permettait de construire une série d’images en ajustant le moment où devait se déclencher le mécanisme. Il a pu ainsi donner une première description qualitative de la formation de ligaments lors de l’impact dont le nombre augmentait avec la hauteur de chute et la taille de la goutte. Le système a par la suite été adapté pour pouvoir prendre de vraies photographies et [Worthington et Cole \(1897\)](#) ont produit les premières images de *splash* induit par l’impact d’une goutte d’eau colorée dans du lait (Fig. 1.3(b)). Le terme "splash" est employé par Worthington lui-même et désigne ici la formation d’une nappe liquide alimentant une corolle à son extrémité qui en se déstabilisant génère de petites gouttes. Ce type de splash ayant une forme caractéristique de couronne est appelé *crown splash* ou encore *corona splash*. C’est ce même type d’évènement qui, entre autre, sera capturé plus tard par [Edgerton et Killian \(1954\)](#) grâce au principe du stroboscope et qui aura un important retentissement auprès du grand public (Fig. 1.3(c)).

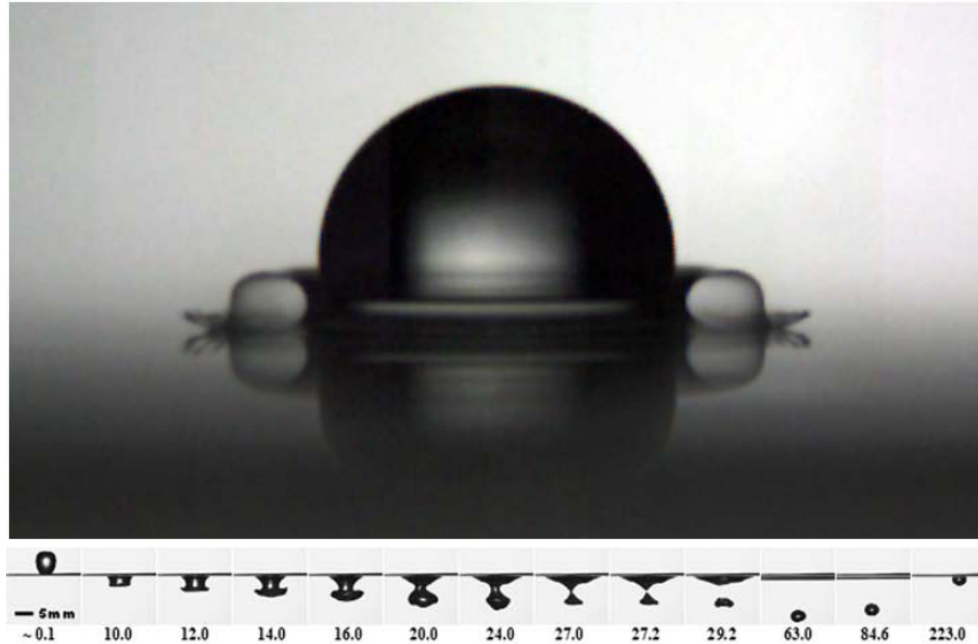


FIGURE 1.4 – Haut : Figure 2.1 de [Thoraval \(2013\)](#) représentant l'émergence et la déflexion de la fine nappe liquide éjectée lors de l'impact à $4,5 \text{ m.s}^{-1}$ d'une goutte sur un bain du même liquide pour un nombre de Reynolds de 1330 et un nombre de Weber de 1830. Dans ce cas précis lorsque la nappe va toucher la surface liquide, des gouttelettes de taille micrométrique sont éjectées ([Thoroddsen et al. 2011](#)). Bas : Figure 2d de [Wang et al. \(2013\)](#) représentant une bulle d'air capturée lors de l'impact d'une goutte de diamètre initial $d = 5,11 \text{ mm}$ à $0,789 \text{ m.s}^{-1}$ sur un bain liquide. Les nombres de Weber et de Froude sont respectivement de 46 et 12.

1.1.2 Quand la surface change, tout change

Comme nous le verrons dans ce chapitre le problème de l'impact de goutte dépend de nombreux paramètres physiques et de la donnée de deux conditions initiales à savoir le rayon initial de la goutte ainsi que sa vitesse d'impact. Cependant la nature de la surface sur laquelle la goutte tombe a une très grande influence sur son comportement, ce qui confère à ce problème une grande richesse ([Rein 1993](#); [Yarin 2006](#); [Josserand et Thoroddsen 2016](#)). De ce point de vue nous pouvons distinguer deux grandes catégories : l'impact sur surface solide et l'impact sur surface liquide. Pour chacun de ces cas il existe de très nombreuses variations. Nous allons citer ici quelques exemples sans toutefois chercher à être exhaustif.

1.1.2.1 Impact sur une surface liquide

Dans le cadre d'un impact sur liquide il faut ajouter en plus des paramètres cités précédemment la donnée de l'épaisseur et de la nature du fluide sur lequel l'impact va se produire. En fonction de la vitesse d'impact et des propriétés physiques du liquide, la goutte impactante peut flotter, rebondir, coalescer, ou encore produire un splash qui par

la suite peut engendrer un jet suite à l'effondrement de la cavité (Rein 1993). Lorsque la viscosité du bain liquide est très supérieure à la viscosité de la goutte, celle-ci peut même s'étaler comme pour un impact sur solide (Jian 2014).

Lors de la dernière décennie les progrès réalisés en matière d'imagerie rapide (Thoroddsen *et al.* 2008) et de simulations numériques (Weiss et Yarin 1999; Josserand *et al.* 2015) ont permis une étude poussée du phénomène de *splashing* et en particulier de la formation de la nappe liquide (*ejecta sheet* en anglais) qui peut évoluer de manière très complexe (Fig. 1.4 haut). Le mécanisme de formation de gouttes satellites dépend de nombreux paramètres et les splashes générés eux-mêmes peuvent être de nature très différente (Thoroddsen *et al.* 2011; Thoraval *et al.* 2012).

Si le bain liquide est suffisamment profond l'impact peut engendrer des anneaux tourbillonnaires (Thomson et Newall 1885; Rodriguez et Mesler 1988) ou peut, comme montré figure 1.4 bas, engendrer la capture de bulles d'air de tailles très variables suivant la taille et la vitesse initiale de la goutte impactante (Pumphrey et Elmore 1990; Wang *et al.* 2013). Ces bulles peuvent par ailleurs générer du bruit sous la surface de l'eau à une fréquence très caractéristique. C'est ce qu'il se produit lorsqu'il pleut à la surface de la mer par exemple (Prosperetti et Oguz 1993).

Comme nous venons de le montrer brièvement, le problème de l'impact sur liquide offre une très grande variété de problèmes et est toujours l'objet d'intenses recherches. Cependant nous ne traiterons pas du tout cet aspect de l'impact de goutte dans le présent manuscrit et nous allons nous concentrer exclusivement sur l'impact sur une surface solide.

1.1.2.2 Impact sur une surface solide

L'impact d'une goutte sur une surface solide peut également admettre des comportements très différents aux temps longs. Dans la limite inertielle qui va nous intéresser dans cette thèse, la goutte peut s'étaler (Eggers *et al.* 2010), produire un splash (Stow et Hadfield 1981; Stow et Stainer 1977) ou encore former une nappe liquide qui va se fragmenter (Villermaux et Bossa 2011). Une classification des événements possibles aux temps longs pour l'impact sur un solide indéformable a été proposée par Rioboo *et al.* (2001). En faisant varier la vitesse et le diamètre initial de la goutte impactante, la nature du liquide utilisé ainsi que la rugosité et la mouillabilité de la surface, les auteurs ont déduit que six types de conclusions étaient possible pour ce problème : l'étalement de la goutte, le *prompt splash* qui est caractérisé par la formation de gouttes satellites issus de la rupture quasi-immédiate de l'extrémité de la nappe liquide qui avance le long du substrat, le *corona splash* que l'on a déjà rencontré au paragraphe 1.1.1, la récession

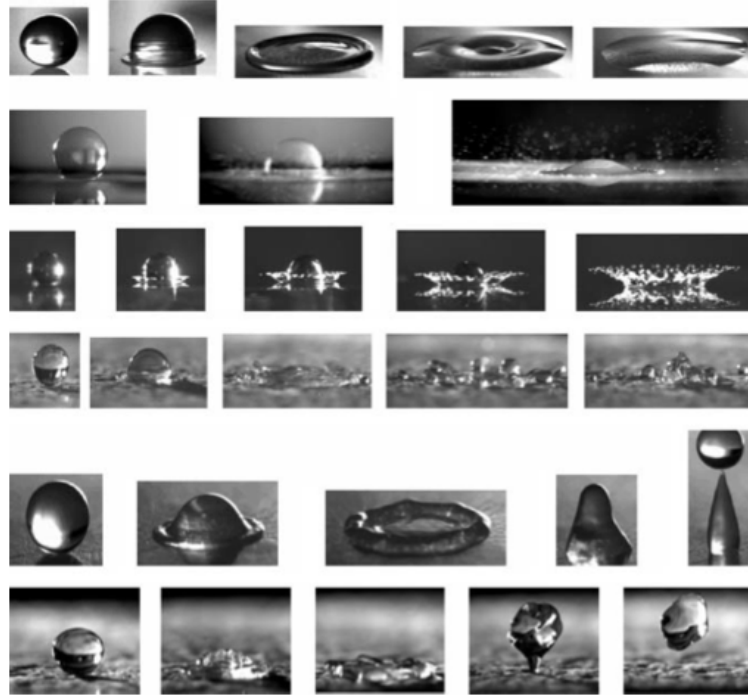


FIGURE 1.5 – Figure 3 de [Rioboo et al. \(2001\)](#) représentant les différents types de comportement aux temps longs pour l'impact d'une goutte sur un support solide. Du haut vers la bas, les différentes possibilités pour un impact sur substrat indéformable sont selon [Rioboo et al.](#) l'étalement, le *prompt splash* défini pour la première fois dans cet article, le *corona splash*, la rupture pendant la récession, le rebond partiel et le rebond. Les conditions de mouillabilité et la rugosité du support sont des paramètres qui entrent en compte dans la sélection de ces événements aux temps longs.

de la nappe liquide et sa rupture, le rebond partiel et le rebond. Les critères nécessaires à l'obtention de l'un ou l'autre de ces états finaux est toujours discutés en particulier en ce qui concerne le *corona splash* et le *prompt splash*. Pour ce dernier l'influence de la rugosité était supposée déterminante ([Xu et al. 2007](#)) mais l'étude récente de [Latka et al. \(2012\)](#) a montré que ce point de vue est insuffisant.

Le comportement aux temps longs de l'impact peut être influencé par d'autres paramètres que l'état de surface du solide. La nature même du matériau sur lequel la goutte impacte est importante. Cette dépendance est clairement mise en évidence par [Pepper et al. \(2008\)](#) qui ont étudié l'impact d'une goutte sur une membrane élastique dont la tension pouvait varier. Les auteurs ont montré que le *splash* pouvait être supprimé en réduisant la tension de la membrane.

Lorsqu'une goutte impacte un substrat mou, celui-ci va se déformer à la base de la goutte. Dans ce type de configuration la phase d'étalement est assez peu modifiée puisque le diamètre maximum atteint peut être le même que pour un substrat dur. Cependant la phase de récession peut être affectée de manière significative. En particulier le diamètre final de la goutte est plus grand ([Mangili et al. 2012](#)). De même lorsque le support est

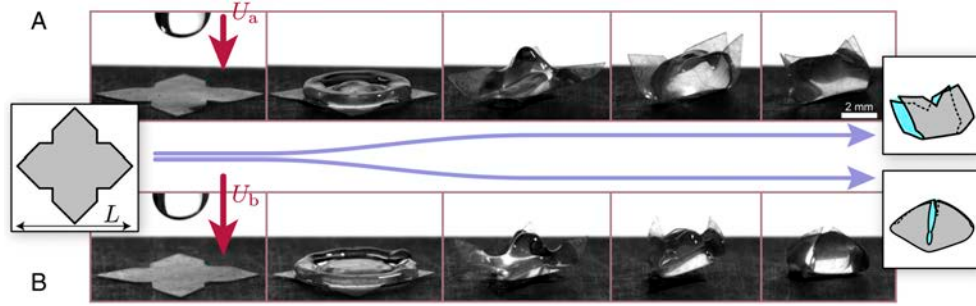


FIGURE 1.6 – Figure 2 de Antkowiak *et al.* (2011) représentant l’impact d’une goutte sur une surface de PDMS posé sur un substrat hydrophobe. Cette expérience met en évidence la sélection de forme des origamis capillaire dynamique lorsqu’on fait varier la vitesse. Dans cet exemple la forme finale peut être cylindrique ou pyramidale.

très souple, la dernière phase de l’impact peut être influencée par la nature du substrat. Par exemple, Antkowiak *et al.* (2011) ont montré que lorsqu’une goutte tombe sur un film fin de polymère, celle-ci était encapsulée par le film par adhésion lors de la phase de récession obtenant ainsi un origami capillaire dynamique. Lorsque le film a deux axes de symétrie les auteurs ont mis en évidence un mécanisme de sélection de forme dépendant de la vitesse d’impact (Fig. 1.6).

Une autre configuration intéressante est l’impact de goutte sur un lit granulaire afin d’étudier l’érosion causée par la pluie. En effet la goutte en s’écrasant sur le sol va induire des efforts normaux ainsi que des frottements sur le substrat et ainsi éjecter des grains ce qui provoque l’érosion de la surface (Furbish *et al.* 2007; Ellison 1945). Dans certaines conditions il est également possible d’obtenir des nappes formées de grains, similaires à des nappes liquides et à un *splash* lorsqu’une bille d’acier tombe sur une surface granulaire (Deboeuf *et al.* 2009).

On peut cependant trouver quelques cas particuliers où l’intuition est prise en défaut et où la nature de la surface ne joue pas de rôle déterminant dans l’évolution de l’impact. Par exemple Kolinski *et al.* (2014) ont montré que pour des vitesses d’impact suffisamment faibles il est possible de faire rebondir sans contact une goutte sur une surface hydrophile de très faible rugosité. Les auteurs ont montré que l’épaisseur du film d’air compris entre le solide et la goutte était nanométrique.

1.2 Impact de goutte sur une surface solide indéformable

Dans toute la suite de cette thèse nous ne considérerons plus que des impacts sur des substrats solide secs, lisses et indéformables. Dans ce paragraphe nous présentons les paramètres physiques dont dépend le problème de l’impact de gouttes.

1.2.1 Effets compressibles

Le problème de l'impact de goutte pouvant par nature être extrêmement violent, on ne peut pas éluder directement la question des effets compressibles. De nombreuses études ont été consacrées aux effets acoustiques dans le liquide, le plus souvent pour des impacts à des vitesses très importantes (typiquement supérieures à 100 m.s^{-1}). Dans de telles conditions une onde de chocs est créée et se propage dans la goutte immédiatement après l'impact (Lesser et Field 1983; Field *et al.* 1989). Une attention particulière a également été accordée aux effets indésirables ou souhaités que ce genre d'impact peut provoquer comme la formation de bulles de cavitation, l'érosion, la fissuration voire la rupture des solides sur lesquels la goutte s'écrase (Bowden et Field 1964; Lesser et Field 1983; Rein 1993; Momber 2004). Dans des cas extrêmes comme les impacts de météorites, ces effets deviennent cruciaux dans la modélisation du phénomène (Melosh et Ivanov 1999).

Lorsque la vitesse d'impact devient beaucoup plus modérée, les effets compressibles sont beaucoup moins spectaculaires. Yarin et Weiss (1995) ont notamment montré qu'ils n'affectent pas le processus de splashing ni le seuil auquel celui-ci apparaît. Il convient cependant de vérifier que les effets acoustiques ne vont pas affecter fortement l'objet de notre étude. En réalité ces effets jouent un rôle important dans les tout premiers instants de l'impact lorsque le rayon de contact entre la goutte et le substrat solide, que l'on nommera dorénavant *rayon mouillé* et que l'on note d dans ce manuscrit, est d'ordre $d \lesssim UR/c$ sur des échelles de temps post-impact d'ordre $t_c \sim UR/c^2$, où U est la vitesse d'impact, R le rayon de la goutte et c la célérité des ondes sonores dans le liquide (Bowden et Field 1964; Weiss et Yarin 1999). Si on considère une goutte de taille millimétrique impactant un solide à une vitesse de l'ordre de 10 m.s^{-1} , typiquement une goutte de pluie tombant à sa vitesse terminale, on constate que les effets acoustiques sont importants seulement dans une région de taille micrométrique durant quelques nanosecondes. Ces échelles spatiales et temporelles sont hors de portée de notre étude où l'on ne considère que les temps t pour lesquels $t_c \ll t$ autrement dit lorsque $\text{Ma}^2 = (\frac{U}{c})^2 \ll \frac{Ut}{R}$. Ici Ma est le nombre de Mach défini comme étant le rapport entre la vitesse d'impact et la vitesse du son. Dans toute la suite de ce manuscrit nous nous limiterons aux cas où le nombre de Mach est très petit devant l'unité ce qui implique que les effets acoustiques peuvent être négligés et qu'une description incompressible de l'écoulement est raisonnable. Cette hypothèse se traduit par une simplification de l'équation de conservation de la masse, qui dans le cas général s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0,$$

en une simple condition de divergence nulle $\text{div}(\vec{u}) = 0$, où \vec{u} est le champ de vitesse. Cette condition justifie l'existence d'une fonction de courant ψ que nous utiliserons dans

le chapitre 2 pour déterminer la structure de l'écoulement dans la goutte aux temps courts.

1.2.2 Influence de la viscosité

La viscosité d'un liquide caractérise la difficulté que celui-ci a à s'écouler. C'est également à cause de cette propriété intrinsèque qu'un solide se meut avec résistance dans un liquide. La viscosité peut donc être vue comme une source d'irréversibilité et sa prise en compte dans les équations régissant le mouvement des fluides en ajoutant un terme de dissipation aux équations d'Euler a permis de résoudre le paradoxe de [d'Alembert \(1752\)](#). On comprend alors que dans le cas de l'impact de goutte sur une surface solide la viscosité aura au minimum un rôle important au voisinage du substrat par l'intermédiaire d'une couche limite.

Le nombre sans dimension qui caractérise la compétition entre les effets inertiels et les effets visqueux est le *nombre de Reynolds*. Il peut être défini comme étant le ratio des forces d'inertie et des forces visqueuses et est donné par :

$$\text{Re} := \frac{\rho U R}{\mu} \quad (1.1)$$

où ρ est la masse volumique du fluide, U une vitesse caractéristique, R une longueur caractéristique et μ la viscosité dynamique. Pour le problème de l'impact de goutte, U et R correspondent typiquement à la vitesse d'impact et au rayon initial de la goutte.

Ce nombre est d'une grande importance pour caractériser la dynamique de l'impact. Il intervient par exemple lors de la détermination du rayon maximal atteint par la goutte ou encore dans le calcul de l'épaisseur minimale du film liquide pour les cas d'étalement ([Josserand et Thoroddsen 2016](#)). De même la viscosité peut modifier de manière importante la dynamique du *splash*. En effet lorsque celle-ci augmente, la nappe liquide décolle du support solide et glisse sur une fine couche d'air. La nappe liquide peut par la suite devenir instable et toucher le solide de nouveau provoquant la capture de petites bulles ([Driscoll et al. 2010](#)). De plus il a été mis en évidence par [Stevens et al. \(2014\)](#) que le temps nécessaire à l'apparition de la nappe liquide lors du *splashing* était plus grand lorsqu'on augmente la viscosité.

Dans notre étude nous privilégierons les impacts à grand nombre de Reynolds. Les effets seront donc particulièrement importants au voisinage du solide et la formation de la couche limite sera discutée au chapitre 2.

1.2.3 Influence des phénomènes capillaires

1.2.3.1 La tension de surface

La tension de surface est une force se manifestant à l'interface entre deux fluides non miscibles (deux liquides ou un liquide et de l'air) et dont l'importance est fondamentale aux petites échelles. Elle permet notamment à certains insectes de marcher sur l'eau et est également responsable de l'apparition de ménisques dans les tubes à essai.

Bien que la tension de surface soit une grandeur macroscopique, son origine est quant à elle microscopique. En effet les molécules au sein du fluide sont attirées par leurs voisines. Cependant les molécules présentes à la surface perdent la moitié des interactions cohésives puisqu'elles sont en interactions avec des molécules de l'autre phase et sont par conséquent dans un état énergétiquement défavorable. La tension de surface que l'on note γ mesure directement ce défaut d'énergie par unité de surface (de Gennes *et al.* 2002). Le liquide ajuste alors sa forme de façon à minimiser sa surface. L'interface est ainsi mise sous tension comme s'il s'agissait d'une membrane tendue. Par conséquent on peut également voir la tension de surface comme une force par unité de longueur.

Le nombre sans dimension qui caractérise la compétition entre les effets inertiels et les effets capillaires est le *nombre de Weber*. Il peut être défini comme étant le ratio de l'énergie cinétique disponible et de l'énergie de surface :

$$\text{We} := \frac{\rho U^2 R}{\gamma} \quad (1.2)$$

où ρ est la masse volumique du fluide, U une vitesse caractéristique, R une longueur caractéristique et γ la tension de surface. Pour le problème de l'impact de goutte, U et R correspondent typiquement à la vitesse d'impact et au rayon initial de la goutte. De même que pour le nombre de Reynolds, le nombre de Weber intervient lorsqu'il s'agit de déterminer le rayon maximal atteint par une goutte qui s'étale ou dans l'étude de la formation d'un splash.

Equation de conservation de la quantité de mouvement : La tension de surface est la dernière quantité que nous avons besoin de définir pour écrire l'équation de la quantité de mouvement qui est la loi fondamentale de la mécanique des fluides. En ajoutant la contribution de la gravité, cette équation a la forme suivante :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{u} + \rho \vec{g} + \gamma \kappa \delta_S \vec{n}, \quad (1.3)$$

où κ est la courbure, \vec{n} est un vecteur normal à l'interface et δ_S est la fonction de Dirac bidimensionnelle restreinte à l'interface. Cette équation peut être adimensionnée

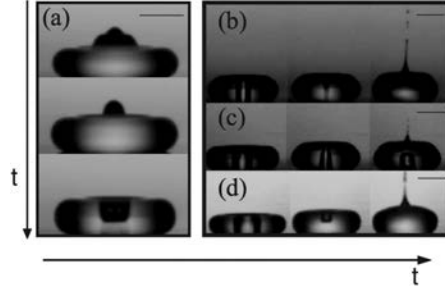


FIGURE 1.7 – Figure 1 de [Bartolo et al. \(2006\)](#) représentant le jet induit par la fermeture brutale de la cavité centrale d’une goutte toroidale. La vitesse d’impact de la goutte est de 0.45 m.s^{-1} pour (a) et (b), de 0.56 m/s pour (c) et de 0.68 m/s pour (d).

en effectuant les changements de variables $\vec{u} = U\vec{\bar{u}}, p = \rho U^2 \bar{p}, t = \frac{R}{U} \bar{t}, \kappa = \frac{1}{R} \bar{\kappa}$ et $\vec{\nabla} = \frac{1}{R} \vec{\bar{\nabla}}$. De plus la fonction de Dirac bidimensionnelle restreinte à l’interface permet de ne considérer que des quantités bidimensionnelles qui était à l’origine dans un espace tridimensionnel, on a alors $\delta_S = \frac{1}{R} \bar{\delta}_S$. Par conséquent, l’équation de conservation de la quantité de mouvement adimensionnée est donnée par :

$$\frac{\partial \vec{\bar{u}}}{\partial \bar{t}} + (\vec{\bar{u}} \cdot \vec{\bar{\nabla}}) \vec{\bar{u}} = -\vec{\bar{\nabla}} \bar{p} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \vec{\bar{u}} - \frac{1}{\text{Fr}} \vec{e}_z + \frac{1}{\text{We}} \bar{\kappa} \bar{\delta}_S \vec{n}, \quad (1.4)$$

où $\text{Fr} = \frac{U^2}{gL}$ est le nombre de Froude qui caractérise l’effet de la gravité par rapport à l’inertie.

1.2.3.2 Effets du nombre de Weber sur le comportement de la goutte

Pour de faibles valeurs du nombre de Weber par rapport à l’unité, une goutte impactant une surface solide va rebondir ([Richard et Quéré 2000](#)) ou s’étaler ([Pasandideh-Fard et al. 1996](#)) suivant la mouillabilité du support. Dans tous les cas la phase d’étalement est dominée par l’inertie et la phase de rétraction est dominée par la tension de surface. Même dans le régime de déposition, des phénomènes rapides associés au déséquilibre des contraintes de surfaces peuvent apparaître ([Stebnovskii 1979](#)). Quand l’énergie cinétique initiale de la goutte ne peut plus être négligée devant la tension superficielle ($\text{We} \sim 1$), des ondes de surface commencent à se développer donnant à la goutte une forme caractéristique de pyramide ou de tore ([Renardy et al. 2003](#)). Comme suggéré avec la figure 1.7, lorsque la goutte a une forme toroïdale, la cavité peut en se refermant générer des jets très violents dont la vitesse peut être quarante fois supérieure à la vitesse d’impact ([Bartolo et al. 2006](#)). Pour des valeurs du nombre de Weber encore plus grandes, telles que pour la limite inertielle $\text{We} \gg 1$ considérée dans le présent manuscrit, on ne s’attend pas à ce que les phénomènes capillaires aient une influence importante à l’échelle de la goutte, mais localement la tension de surface peut jouer un rôle dominant comme par exemple à l’endroit de la naissance du jet. Dans cette thèse nous ne tiendrons pas compte

de ces effets très localisés qui seront invisibles à notre niveau de description. Néanmoins nous discuterons ce point de manière plus précise dans le chapitre 2.

1.2.3.3 Angle de contact dynamique

La ligne de contact est une des régions où des effets importants de la tension de surface sont attendus. En effet l'impact de goutte est caractérisé par des écoulements rapides près de la ligne de contact. Ce phénomène de mouillage dynamique violent pourrait compliquer sérieusement une modélisation de l'impact en temps court qui sera l'objet du chapitre 2.

L'angle de contact dans sa configuration statique θ_e correspond à une situation d'équilibre des forces au niveau de la ligne de contact. Lorsque la ligne triple n'est plus à l'équilibre, c'est-à-dire lorsque la force résultante F est non nulle, celle-ci se déplace à la vitesse V et l'angle de contact θ_d a une valeur différente de θ_e . Cet angle θ_d est appelé *angle de contact dynamique*. Il est supérieur à θ_e si la vitesse va dans le sens de la partie sèche du substrat. On parle alors d'angle d'avancée. Dans le cas contraire on parlera plutôt d'angle de reculée. La puissance mécanique associée FV est dissipée par viscosité au voisinage de la ligne de contact. La dissipation visqueuse obtenue en intégrant sur un volume élémentaire la quantité $2\mu \underline{D}$: \underline{D} diverge logarithmiquement comme le montre l'analyse de [de Gennes et al. \(2002\)](#) basée sur le modèle du dièdre. Les effets responsables de la régularisation de cette singularité ne sont toujours pas clairs et cette question ne sera pas du tout abordée dans cette thèse. On pourra cependant consulter la revue de [Bonn et al. \(2009\)](#) pour trouver une liste exhaustive des mécanismes susceptibles de lever cette singularité. [de Gennes et al. \(2002\)](#) traitent le problème en introduisant des longueurs de coupure leurs permettant ainsi d'équilibrer la puissance mécanique et la dissipation visqueuse. En faisant l'hypothèse des petits angles, ils obtiennent une relation entre la vitesse V et les angles de contact statique et dynamique donnée par :

$$V = \frac{V^*}{6l} \theta_d (\theta_d^2 - \theta_e^2), \quad (1.5)$$

où $V^* = \frac{\gamma}{\mu}$ est une grandeur caractéristique pour la plupart des phénomènes capillaires en régime visqueux et l est le coefficient résultant de la régularisation de la singularité. On retrouve bien à l'aide de cette relation le cas statique où $V = 0$ lorsque $\theta_d \rightarrow \theta_e$. De nombreux raffinements de cette loi sont possible comme le modèle de Cox-Voinov ([Cox 1986](#); [Voinov 1976](#)) donnant une relation entre la dérivée de la position de la surface libre au voisinage de la ligne de contact, le nombre capillaire $\text{Ca} := \frac{\mu V}{\gamma}$ et l'angle de contact microscopique (voir par exemple [Bonn et al. \(2009\)](#)).

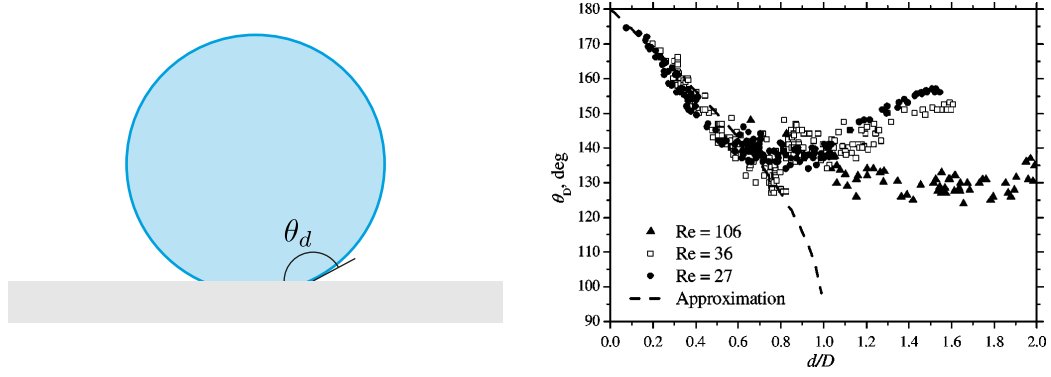


FIGURE 1.8 – Gauche : Schéma représentant l’angle de contact dynamique pendant les premiers instants de l’impact (phase cinématique) lorsque la goutte a à peu près la forme d’une sphère tronquée. Droite : Figure 8 de Šikalo *et al.* (2005) représentant l’évolution de l’angle de contact dynamique en fonction du facteur d’étalement. Aux temps courts l’approximation de la sphère tronquée $\theta_d = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{d(t)}{R}\right)$ est en bon accord avec les données expérimentales. Les expériences ont été réalisées sur des supports de mouillabilités différentes et pour des nombres de Reynolds de 106, 36 et 27.

Le problème de la détermination de l’angle de contact dynamique est très difficile. Blake *et al.* (1999) ont montré que des effets hydrodynamiques non locaux pouvaient influencer de manière significative l’angle de contact dynamique. A partir de données expérimentales, les auteurs ont mis en avant la possible dépendance mutuelle entre les phénomènes au voisinage de la ligne de contact et l’écoulement en champ lointain révélant ainsi une difficulté supplémentaire pour l’étude de ce problème. Cependant les effets hydrodynamiques non locaux sont sous-dominant pour notre problème puisque nous travaillons dans un cadre inertiel. En effet Šikalo *et al.* (2005) ont démontré à l’aide d’expériences et de simulations numériques que l’évolution aux temps courts de l’angle de contact dynamique était assez insensible aux conditions expérimentales et assez bien capturée par l’angle de contact d’une sphère tronquée (Rioboo *et al.* 2002). Par conséquent il est possible d’approximer l’angle de contact dynamique par la relation suivante :

$$\theta_d = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{d(t)}{R}\right). \quad (1.6)$$

La figure 1.8 droite correspond à la figure 8 extraite de Šikalo *et al.* (2005) représentant l’angle de contact dynamique en fonction du facteur d’étalement, défini comme le ratio entre le rayon mouillé et le rayon initial de la goutte. Cette figure montre le bon accord existant entre les données expérimentales et l’approximation donnée par l’équation (1.6) pendant la phase cinématique.

De plus, dans le but de valider le modèle utilisé dans l’article et de vérifier la sensibilité des méthodes numériques, les auteurs ont comparé les résultats expérimentaux pour le facteur d’étalement avec deux solutions numériques obtenues avec des conditions aux

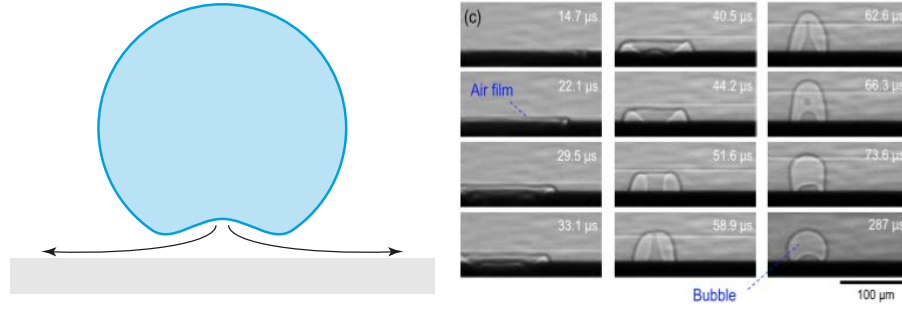


FIGURE 1.9 – Gauche : Schéma représentant le changement de forme de la goutte à sa base avant impact et la formation d’une fossette à cause de la pression de lubrification de la couche d’air. Droite : Figure 1c de [Lee et al. \(2012\)](#) représentant l’évolution complexe du film d’air capturé par la goutte au moment de l’impact en une bulle. Cette contraction permet de minimiser l’énergie de surface.

limites différentes au niveau de la ligne de contact (voir la figure 13 de [Šikalo et al. \(2005\)](#)). La première correspond à un angle de contact dynamique variable basé sur une relation empirique ([Kistler 1993](#)) et utilisé dans leur propre code. La seconde correspond à un angle de contact dynamique constant $\theta_d = \theta_a$ (angle d’avancé) durant la phase d’étalement et $\theta_d = \theta_r$ (angle de recul) pendant la phase de récession. Le facteur d’étalement est bien prédit dans les deux cas pour la phase d’étalement. Ce bon accord illustre à nouveau le caractère inertiel des premiers instants de l’impact et à la faible influence des forces associées à la mouillabilité. Ces résultats nous incitent à ne pas étudier davantage le comportement de l’angle de contact dynamique dans cette thèse. Dans toute la suite cet angle sera fixé à $\frac{\pi}{2}$ pour chacune des simulations numériques.

1.2.4 Influence de l’air ambiant

Depuis une dizaine d’année le nombre d’études concernant le rôle joué par l’air environnant dans le problème de l’impact de goutte s’est considérablement accru. Il a été montré qu’on peut distinguer deux types de problèmes différents. Il y a tout d’abord une manifestation pré-impact de ces effets avec la capture d’une petite bulle d’air centrée à la base de la goutte au moment de l’impact. Ce phénomène se produit dans tous les cas à pression atmosphérique et a été observé pour la première fois par [Chandra et Avedisian \(1991\)](#). Plus récemment il a été mis en évidence une manifestation post-impact spectaculaire des effets de l’air sur l’impact de goutte par [Xu et al. \(2005\)](#) qui ont montré que la pression environnante avait une influence considérable sur le comportement aux temps longs.

1.2.4.1 Effet pré-impact : capture d'une bulle d'air

Lorsqu'une goutte tombe verticalement en direction d'un solide, elle va mettre en mouvement l'air qui est en dessous avant le contact. Quand la goutte est proche de la surface, la pression de lubrification dans la couche d'air devient suffisamment importante pour la déformer à sa base. Il y a alors localement une inversion de courbure qui induit la capture d'une fine couche d'air au moment de l'impact (Fig. 1.9 gauche). Cette zone déformée au point le plus bas de la goutte est communément désignée par le mot anglais *dimple*, que l'on peut traduire en français par *fossette*. Le contact entre le solide et la goutte n'est par conséquent pas ponctuel et le film d'air capturé va ensuite se rétracter pour minimiser son énergie de surface et former une bulle. Cette rétraction a été observée pour la première fois par Thoroddsen *et al.* (2005). Par l'intermédiaire d'une mesure du volume de la bulle, les auteurs en ont déduit que l'épaisseur moyenne du disque d'air initial est comprise entre 2 et 5 μm . L'évolution du film d'air en une bulle est extrêmement complexe et a pu être pleinement appréhendée par Lee *et al.* (2012) grâce à un dispositif d'imagerie ultra-rapide à rayon X (Fig. 1.9 droite).

La formation de la fossette est gouvernée par un équilibre entre l'inertie de la goutte et la pression de lubrification dans l'air qui est chassé par cette dernière. Il est possible de donner par un argument d'analyse dimensionnelle une estimation de la distance caractéristique H^* séparant la goutte et le solide à partir de laquelle la pression de lubrification est suffisante pour commencer à déformer la goutte (Josserand et Thoroddsen 2016). Cette estimation fait intervenir le nombre de Stokes St qui est le produit d'un nombre de Reynolds par le ratio de viscosité dynamique et qui quantifie dans ce cas l'influence de l'air dans la couche de lubrification sous la goutte avant l'impact. Autrement dit, le nombre de Stokes est donné par :

$$St := \frac{\mu_g}{\rho_l R V},$$

où μ_g , ρ_l , R et V sont respectivement la viscosité de l'air, la masse volumique du liquide, le rayon initial de la goutte et la vitesse d'impact. L'idée consiste à remarquer que la distance H séparant la goutte du solide doit devenir suffisamment petite pour que la pression de lubrification dans la couche d'air $P \sim \mu_g V R / H^2$ devienne assez grande pour pouvoir rapidement décélérer l'extrémité basse de la goutte. Par des arguments géométriques, on peut montrer que l'échelle radiale dans la couche d'air est de l'ordre de \sqrt{RH} . La décélération a se produit sur la distance H en un temps très court $\tau \sim H/V$. Par conséquent $\rho_l a \sim \rho_l V / \tau \sim \rho_l V^2 / H$. L'équilibre entre ces deux effets est donné par $\rho_l V^2 / H \sim P / \sqrt{RH}$. On obtient alors l'ordre de grandeur de l'épaisseur caractéristique H^* :

$$H^* = R St^{\frac{2}{3}}.$$

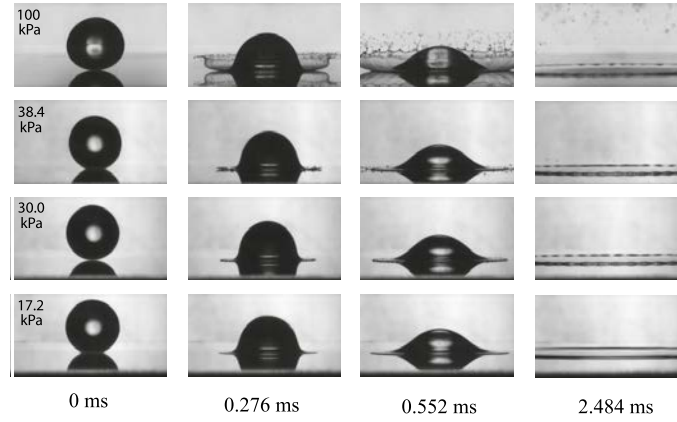


FIGURE 1.10 – Figure 1 de [Xu et al. \(2005\)](#) montrant qu’en réduisant la pression environnante tout en conservant tous les autres paramètres inchangés il est possible de passer d’une situation de splashing à de l’étalement.

Cet effet pré-impact sera discuté au chapitre 2 lors de la modélisation du problème aux temps courts.

1.2.4.2 Effet post-impact : suppression du splashing

Il y a quelques années encore, les effets de l’air dans le mécanisme de formation d’un splash était inconnus. Jusque là il était admis que ce problème dépendait de la surface d’impact et de paramètres physiques tels que la viscosité et la tension de surface. Les relations empiriques proposées pour déterminer la transition d’une situation d’étalement vers le splashing dépendaient généralement des nombres de Reynolds et de Weber. On peut citer à titre d’exemple le critère basé sur le paramètre $K = We^{\frac{1}{2}} Re^{\frac{1}{4}}$ ([Mundo et al. 1995](#)). Lorsque K est inférieur à une valeur seuil K_c alors on observe de l’étalement sinon on observe un splash. La valeur de K_c dépend de la ruguosité du support.

Ce point de vue a dû être révisé lorsque [Xu et al. \(2005\)](#) ont montré qu’en réduisant la pression de l’air environnant tout en conservant les autres paramètres constants il était possible de passer d’un *splash* à de l’étalement (Fig. 1.10). Depuis, de nombreuses études ont été menées pour essayer de comprendre les mécanismes responsables de cette transition et de nouveaux critères faisant intervenir le libre parcours moyen ont notamment été proposés ([Stevens 2014](#); [Riboux et Gordillo 2014, 2015](#)). De nombreux points restent à éclaircir notamment en ce qui concerne la différenciation entre le *prompt splash* et le *corona splash*.

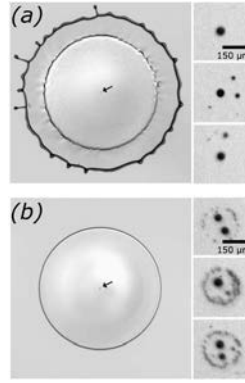


FIGURE 1.11 – Figure 8 de [Driscoll et al. \(2010\)](#) représentant l’impact d’une goutte d’huile de silicone de viscosité 10 cSt. En haut l’impact est à pression atmosphérique et on observe un splash. En bas, la pression ambiante est d’environ 20 kPa et aucun splash n’est produit. Donc dans les deux cas on observe la capture de petites bulles d’air au centre de l’impact.

1.2.4.3 Corrélation des deux phénomènes

La question de la corrélation entre ces deux manifestations du rôle de l’air environnant peut se poser. Du point de vue théorique [Duchemin et Josserand \(2011\)](#) ont montré que pour la limite $We \rightarrow \infty$, autrement dit pour le cas idéal où il n’y aurait pas de tension de surface, une goutte impactant une surface solide présente une singularité de courbure en temps fini. L’interface a donc une forme de coin et le contact solide/liquide a une forme de cercle. Pour cette configuration purement théorique il n’y a donc pas de formation d’un jet mais en revanche la fossette est bien présente. Lorsque la tension de surface est reprise en compte, la singularité est régularisée et [Duchemin et Josserand](#) constatent qu’en plus de la fossette il y a bien une nappe liquide qui se forme à la base de la goutte au bout d’un certain temps ce qui suggère que les deux événements pourraient ne pas être liés. De même, [Driscoll et al. \(2010\)](#) ont montré qu’en réduisant la pression ambiante de façon à observer une transition entre un impact produisant un *splash* et un autre n’en produisant pas (Fig. 1.11), de petites bulles d’air étaient toujours capturées au centre de l’impact. Finalement ces résultats sont confirmés par [Riboux et Gordillo \(2014\)](#) qui affirment que la présence d’une petite bulle capturée à la base de la goutte n’affecte pas la formation de *splash*.

1.3 Temps courts

Les instants primordiaux du problème de l’impact de gouttes ont été dans l’ensemble assez peu étudiés à cause de difficultés aussi bien expérimentales que numériques. En effet les échelles spatiales et temporelles mises en jeu juste après l’impact sont tellement petites que les toutes premières phases restaient difficilement accessibles jusqu’il y a peu.

Il y a cependant quelques études qui nous donnent de précieux renseignements pour la mise au point d'un modèle pertinent pour les temps courts et qui nous serviront de garde-fou tout au long du chapitre 2.

Une des toutes premières études à s'intéresser aux temps courts pour l'impact de goutte date des années 1950. Avec ce qui devait être probablement une des toutes premières caméras rapides (capable de faire des acquisitions jusqu'à 15 000 images par seconde!), [Engel \(1955\)](#) fait une observation pour le moins surprenante :

It can be concluded from these pictures that the head of liquid of the drop, before it enters into radial flow, shows an ability to resist a change of shape during collision with a solid. This may be a result of its inertia, or of its viscosity, or surface tension.

Intuitivement, on pourrait penser au contraire que la goutte tout entière doit subir immédiatement les effets du choc notamment à cause du caractère incompressible de l'écoulement qui est à faible nombre de Mach. Le fait que le sommet de la goutte semble garder sa forme durant les premiers instants de l'impact montre que d'une manière ou d'une autre cette zone n'a pas encore été affectée par l'impact. D'une certaine façon, "l'information n'est pas encore arrivée" jusque là. Cet apparent paradoxe sera expliqué dès le début du chapitre suivant.

Près de cinquante ans plus tard [Rioboo et al. \(2002\)](#) ont pu de manière plus précise observer les premiers instants de l'impact et ainsi séparer le problème en quatre étapes lorsque le comportement en temps long correspond à de l'étalement. La première d'entre elles, correspondant aux temps les plus courts, est appelée *phase cinématique*. [Rioboo et al.](#) précisent que durant cette phase la goutte ressemble à une sphère tronquée et qu'aucune corolle n'est encore visible. Par ailleurs leurs nombreuses expériences montrent que le rayon mouillé croît approximativement comme \sqrt{t} que ce soit dans le cas d'un impact sur une lame de verre pour des fluides différents (Fig. 1.12(a)) en faisant varier de manière significative le nombre de Reynolds et le nombre de Weber ou dans le cas d'un impact sur des surfaces aux propriétés différentes mais avec le même fluide (Fig. 1.12(b)). A ce propos des expériences récentes ont montré sans ambiguïté possible que lors de la phase cinématique la loi du mouvement de la ligne de contact ou de manière équivalente le rayon mouillé est donné par $\sqrt{3RUt}$ ([Riboux et Gordillo 2014](#)) où R et U sont respectivement le rayon et la vitesse initiale de la goutte. Nous reviendrons au chapitre suivant sur la détermination théorique de cette quantité qui va se révéler très importante par la suite.

Devant la persistance quelles que soient les conditions de la loi en racine carrée du temps pour le rayon mouillée, [Rioboo et al.](#) arrivent à la conclusion suivante (§ 3.1) :

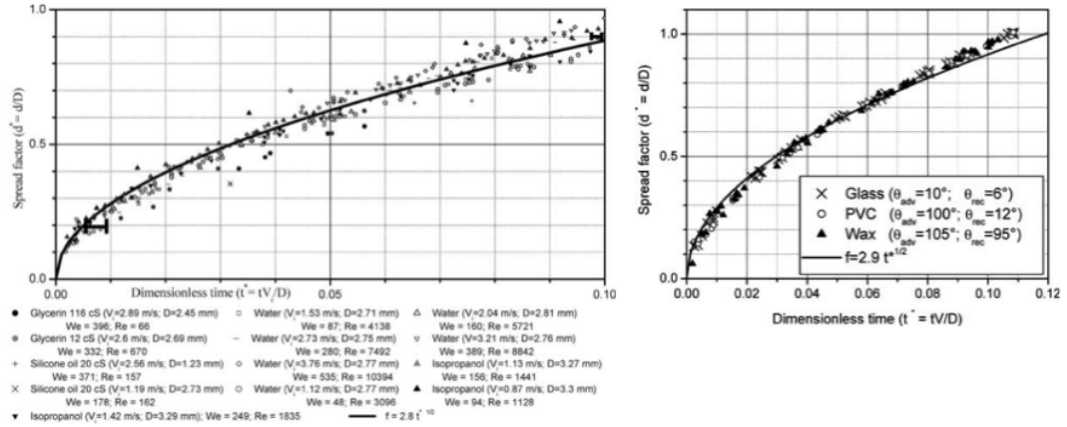


FIGURE 1.12 – (a) Figure 4 de Rioboo *et al.* (2002) représentant le facteur d'étalement en fonction du temps pour des impacts de gouttes sur une lame de verre. Différents liquides ont été utilisés de façon à pouvoir faire varier fortement les nombres de Reynolds et de Weber. (b) Figure 5 de Rioboo *et al.* (2002) représentant les mêmes grandeurs pour des impacts sur des surfaces de mouillabilité différente. Dans tous les cas le liquide utilisé est de l'eau et chaque goutte a le même diamètre et la même vitesse d'impact (nombre de Weber fixé à $We = 390$). Quelque soit l'expérience, Rioboo *et al.* montrent que le diamètre mouillé évolue comme la racine carrée du temps. Ce qui signifie qu'en temps court le phénomène est avant tout inertiel.

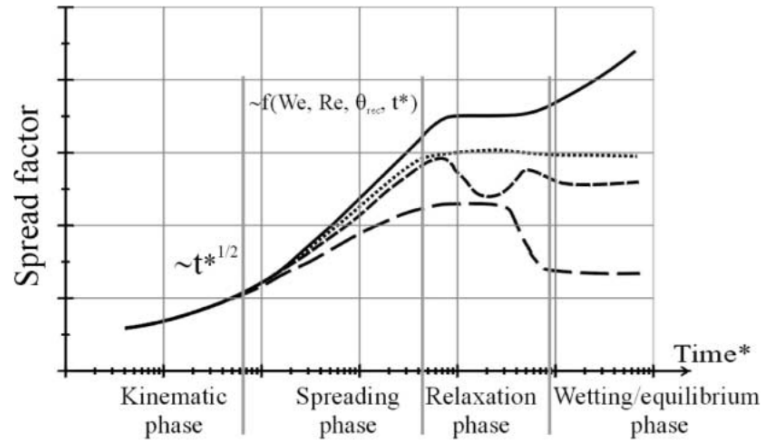


FIGURE 1.13 – Figure 1 de Rioboo *et al.* (2002) représentant le facteur d'étalement en fonction du temps adimensionné. On constate que la phase cinématique est la seule à ne dépendre d'aucun paramètre autre que la vitesse d'impact et le diamètre initial. En revanche les autres phases dépendent fortement de la viscosité, de la tension de surface ou de l'angle de reculée.

It is clear from this systematic variation of numerous parameters that this phase of the impact process is completely described by the impact velocity and initial diameter.

Autrement dit en temps court, l'impact de goutte est un phénomène essentiellement dominé par l'inertie! Les effets visqueux, de tension de surface ou les propriétés de mouillage n'ont que très peu d'importance dans la dynamique globale du système. Cette remarque fondamentale nous sera utile dans le chapitre suivant. Dès la naissance d'une nappe liquide à la base de la goutte, l'impact entre dans sa *phase d'étalement* où tous les paramètres jouent un rôle dans l'évolution de l'impact comme le montre la figure 1

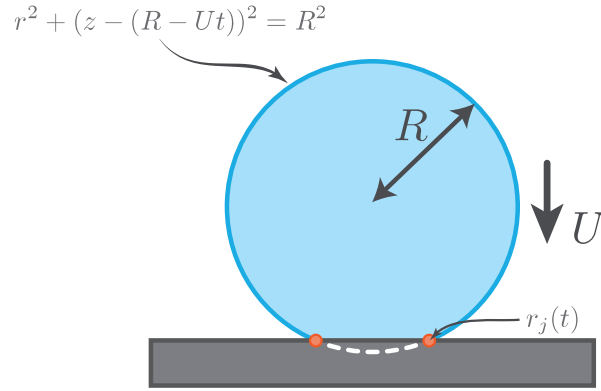


FIGURE 1.14 – Schéma illustrant le raisonnement géométrique utilisé pour déterminer la position de l'intersection entre la goutte et la couche liquide $r_j(t)$. La goutte de rayon R tombe à vitesse constante U donc l'équation de la sphère dans le plan (r, z) est donnée par $r^2 + (z - (R - Ut))^2 = R^2$ puisqu'aux temps courts la goutte a la forme d'une sphère tronquée. En prenant $z = 0$ et en négligeant le terme d'ordre 2 en temps, on obtient $r_j(t) = \sqrt{DUt}$.

de Rioboo *et al.* (2002) (Fig. 1.13) représentant le facteur d'étalement d^* défini par le rapport entre le diamètre mouillé d et le diamètre initial D de la goutte en fonction du temps adimensionné par le temps convectif D/V où V est la vitesse d'impact. Chaque courbe a été réalisée avec des paramètres différents (Re , We , angle de reculée θ_r) modifiant l'histoire de l'étalement. Cette phase est suivie d'une *phase de relaxation* pendant laquelle le comportement de la goutte peut changer suivant la valeur de l'angle de reculée. La phase finale est soit une *phase d'équilibre* où la nappe liquide ralentit fortement et atteint un diamètre constant ou pour les surfaces très mouillantes une *phase de mouillage* pour laquelle la nappe liquide continue lentement sa progression (*loi de Tanner*).

Du point de vue théorique et numérique Josserand et Zaleski (2003) ont les premiers suggéré qu'aux temps courts le champ de pression avait une structure autosimilaire. Par un argument de conservation de la quantité de mouvement, ils arrivent à estimer l'ordre de grandeur de la pression maximale. Bien que leur étude concerne les impacts sur liquide le raisonnement reste valable pour les impacts sur solide. Josserand et Zaleski remarquent tout d'abord que la quantité de mouvement de la goutte assimilée à une sphère parfaite de diamètre D (ou de manière équivalente de rayon R) et de vitesse initiale U est réduite par l'impact. Aux temps courts, cela reste vrai au voisinage de la zone de contact. On peut estimer que cette quantité de mouvement verticale "perdue" pendant l'impact est d'ordre $M \sim \rho r^3 U$, avec ρ la masse volumique du liquide et r la coordonnée radiale. La pression équilibre alors cette quantité de mouvement :

$$\frac{dM}{dt} \propto p.S \quad (1.7)$$

où p est la pression et S est la surface mouillée. On en déduit que $\frac{\rho r^3 U}{t} \sim pr^2$. Le point d'intersection entre la goutte et la couche liquide $r_j(t)$, qui est le pendant de notre

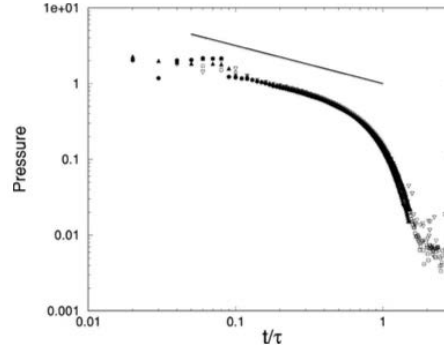


FIGURE 1.15 – Figure 10 de [Josserand et Zaleski \(2003\)](#) représentant la pression maximale en fonction du temps, tout deux adimensionnés, pour un nombre de Weber de 8000 et des nombres de Reynolds allant de 20 à 1000. L'estimation théorique semble en bon accord avec la solution numérique dans tous les cas. On constate qu'au bout d'un certain temps $\tau \sim \frac{D}{U}$, la pression s'effondre de manière brutale.

rayon mouillé pour l'impact sur solide, est obtenu par le raisonnement géométrique suivant résumé sur la figure 1.14. L'équation de la sphère dans le plan (r, z) est alors $r^2 + (z - (R - Ut))^2 = R^2$. On peut supposer que la goutte ne se déforme pratiquement pas c'est à dire que celle-ci a une forme de sphère tronquée étant donné que nous ne considérons ici que les temps courts. On en déduit alors pour $z = 0$ le carré de la position de l'intersection de la goutte et de la couche liquide en fonction du temps à savoir $r_j^2(t) = R^2 - (R - Ut)^2 = 2RUt - U^2t^2$. Au premier ordre en temps on a alors :

$$r_j(t) \sim \sqrt{2RUt} = \sqrt{DUt}. \quad (1.8)$$

On en déduit une estimation de la pression donnée par la relation suivante :

$$p \sim \frac{\rho r_j(t) U}{t} = \rho \sqrt{\frac{DU^3}{t}}. \quad (1.9)$$

C'est un résultat fort que [Josserand et Zaleski](#) ont consolidé avec des simulations numériques pour un nombre de Weber de 8000 et des nombres de Reynolds allant de 20 à 1000 (Fig. 1.15). Bien qu'à l'époque les moyens de calculs ne permettaient pas d'obtenir de résultats sur plusieurs décades, on constate que l'ordre de grandeur obtenu semble être en bon accord avec les solutions numérique. Au bout d'un temps $\tau \sim \frac{D}{U}$ correspondant au temps convectif, on constate un effondrement de la pression. Ce comportement sera l'objet du chapitre 3.

Ces études nous donnent de précieux renseignements sur le comportement aux temps courts d'une goutte impactant une surface solide. Cependant une description théorique précise des événements se produisant aux instants primordiaux de l'impact est toujours manquante. Un des objectifs de cette thèse est de combler cette lacune.

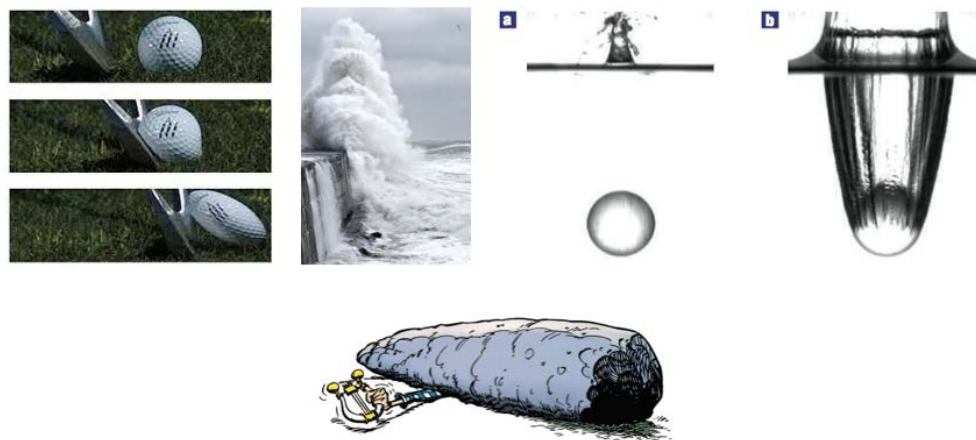


FIGURE 1.16 – Quelques exemples de problèmes d'impact. (a) Club de golf frappe une balle. (b) Une vague s'écrase sur un quai. (c) Figure 1 de [Duez *et al.* \(2007\)](#) représentant la plongée d'une sphère hydrophobe (droite) et d'une sphère hydrophile dans l'eau (gauche). (d) Un coup de menhir sur un barde qui chantait trop fort ([Goscinnny & Uderzo](#)).

1.4 Les problèmes d'impact

L'impact de goutte peut être vu comme une partie d'un ensemble de problèmes plus vaste : les problèmes d'impact. Un club de golf frappant une balle, l'impact d'une vague contre un rocher ou une digue, une caillou jeté dans l'eau ou encore un coup de menhir sur un barde qui chantait trop fort (Fig. 1.16), tous ces problèmes *a priori* très différents partagent en réalité un certains nombres de points communs. Il s'agit à chaque fois de phénomènes très violents se produisant sur des temps très courts et pour lesquels une des conditions aux limites au moins change de manière brutale. La compréhension même partielle d'un seul de ces problèmes peut être une source d'inspiration pour la compréhension de tous les autres. On espère alors que l'on pourra utiliser avec succès le même formalisme pour des problèmes différents. C'est cette idée que nous allons essayer de développer tout au long de cette thèse.

Un cas en particulier nous intéresse dans cette étude. Il s'agit du problème dual de l'impact de goutte à savoir l'impact d'un objet solide sur une surface liquide (*water entry* en anglais). L'analogie entre ces deux problèmes est la pierre angulaire du chapitre suivant et nous verrons que cette approche est particulièrement féconde.

1.4.1 Impact d'un solide sur une surface liquide

En utilisant les mêmes procédés que pour l'étude de l'impact de gouttes, [Worthington \(1882\)](#) fut le premier à étudier l'impact d'un objet solide dans un bain liquide et à obtenir des résultats qualitatifs grâce à ses observations ([Worthington et Cole 1897](#); [Worthington 1908](#)). Il a néanmoins fallu attendre le début des années 1930 pour avoir une progression

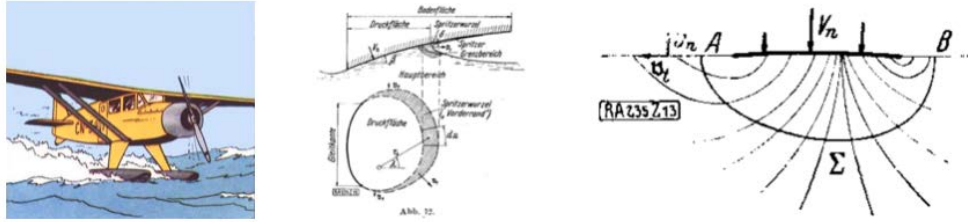


FIGURE 1.17 – (a) Amerrissage d’un hydravion dans *Le crabe aux pinces d’or* d’Hergé. (b) Figure 12 de [Wagner \(1932\)](#) représentant les différentes régions fluides considérées dans le problème du *water entry* à savoir la région extérieure, la région de naissance du jet et le jet lui même. (c) Figure 13 gauche de [Wagner \(1932\)](#) représentant l’écoulement induit par l’impact du flotteur à la surface de l’eau. Cet écoulement contourne la ligne de contact de la plaque plane équivalente.

dans la compréhension de ce type de problème grâce aux travaux de [Wagner \(1932\)](#). Celui-ci propose un modèle qui pose les bases de toute la théorie moderne du *water entry*. Le but de l’étude présentée par [Wagner](#) était de déterminer l’effort induit par l’eau sur le flotteur ou la quille lors de l’amerrissage des hydravions (Fig. 1.17(a)). Ces efforts pouvant être importants, il est intéressant de pouvoir les quantifier. Pour cela il considère l’impact d’un solide à une vitesse donnée sur un fluide non visqueux, incompressible initialement au repos dont la surface libre est parfaitement plate. La gravité est négligée dans ce problème. Bien qu’il commence à travailler dans un cadre très général, [Wagner](#) ne va au bout de son calcul que pour quelques cas particuliers (en deux dimensions) notamment en ce qui concerne la forme du solide. Il considère en particulier le cas limite où l’angle d’inclinaison β de la surface du solide par rapport à la surface initiale du fluide en chaque point est infiniment petite. La profondeur d’immersion du solide doit être également très faible tout comme la vitesse V_n normale à la surface du solide.

L’écoulement dans le fluide est induit par le mouvement du solide à travers la surface libre, ce qui correspond à un changement brutal de conditions aux limites. La violence de l’impact va provoquer la naissance d’un jet s’écoulant le long de la surface du solide. Comme représenté sur la Fig. 1.17(b) les différentes régions du fluide mises en jeu dans ce problème sont divisées par Wagner en une région extérieure (ou principale), une région de naissance du jet et le jet lui-même (ou le splash). La première idée majeure de [Wagner](#) est de modéliser l’écoulement induit par le solide par celui induit par une plaque plane infiniment mince dont le rayon croît au cours du temps de façon à ce que ce dernier corresponde au rayon mouillé du solide. C’est ce qu’on appelle communément *l’hypothèse de Wagner*. L’écoulement ainsi engendré contourne la plaque (Fig. 1.17(c)) et va provoquer la formation d’un jet ou d’un splash. La connaissance de cet écoulement est alors utilisée pour déterminer le mouvement de la surface libre, élément essentiel pour la détermination du rayon mouillé. Ce qui conduit à la seconde grande idée de Wagner qui consiste à rajouter au problème une condition de raccord entre la position

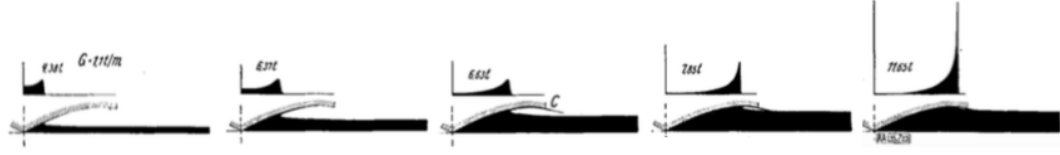


FIGURE 1.18 – Figure 23 de [Wagner \(1932\)](#) représentant l'évolution de la pression induite par l'impact sur la surface du solide. On constate que la pression n'est pas maximale au centre mais près de la ligne de contact.

de la surface libre et la position du solide. Cette condition appelée *condition de Wagner* est fondamentale pour le calcul de la loi du mouvement de la ligne de contact.

Dans les cas particuliers à deux dimensions traités par [Wagner](#), celui-ci utilise la théorie des écoulements potentiels. A partir de l'équation de Bernoulli instationnaire

$$p = -\rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + F(t) \right), \quad (1.10)$$

où ϕ est le potentiel de vitesse, il détermine la pression dans la partie fluide le long du solide. Une structure particulière apparaît alors comme représenté par la Fig. 1.18, où la pression maximale n'est pas sur l'axe de symétrie du solide mais au niveau de la ligne de contact. Il note également que le terme représentant le carré de la vitesse est négligeable devant la dérivée temporelle du potentiel des vitesses. Il parvient également à déterminer les efforts induits sur le solide en utilisant la conservation de la quantité de mouvement.

Les travaux de [Wagner](#) ont été quelques décennies plus tard refondés sur des bases solides à l'aide de l'analyse asymptotique ([Cointe et Armand 1987](#); [Wilson 1989](#); [Howison et al. 1991](#)). Ce formalisme permet de considérer l'ordre de grandeur des différents termes des équations constitutives du problème de manière plus quantitative et d'estimer plus précisément la taille des différentes régions d'intérêt de l'écoulement. Ces dernières peuvent également être raccordées de manière plus cohérente sur le plan théorique. C'est d'ailleurs dans ce but qu'une quatrième région a été ajoutée dans la "cartographie" de l'écoulement par [Oliver \(2002\)](#); [Howison et al. \(2002\)](#). Cette région appelée *région de Wagner* fait office d'intermédiaire entre la région extérieure et la région de naissance du jet.

Des solutions analytiques en deux dimensions pour la pression exercée sur un solide impactant une surface liquide sont proposées par [Howison et al. \(1991\)](#) pour quelques cas particuliers. Ils s'intéressent notamment au cas où le solide en question à une forme parabolique. La pression à l'ordre dominant obtenue à partir de la théorie de Wagner et de l'analyse asymptotique est comparée avec des données expérimentales obtenues par [Nethercote et al. \(1986\)](#) dans le cadre d'une étude sur le *slamming* (voir la figure 1.19(b)).

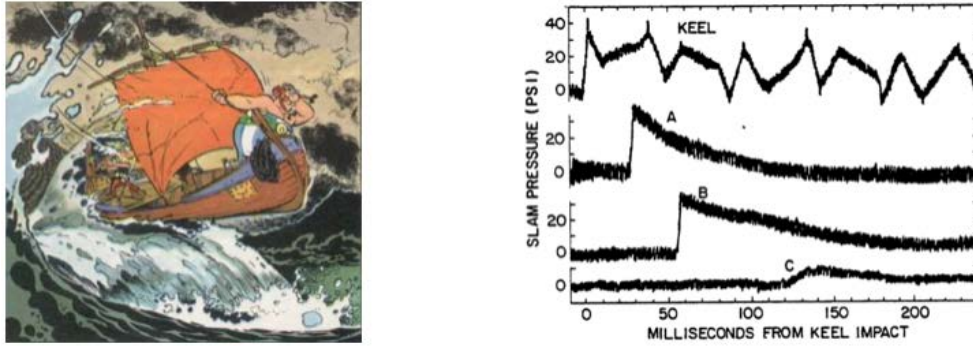


FIGURE 1.19 – Gauche : Exemple de tossage lors de *la grande traversée* d’Astérix (René Goscinny & Albert Uderzo, Editions Dargaud, 1975). Droite : Figure 23 de [Nethercote et al. \(1986\)](#) représentant la pression induite par du tossage pour des structures de section droite quasi-parabolique. Ces résultats expérimentaux sont comparés par [Howison et al. \(1991\)](#) avec un calcul en deux dimensions pour le même type de solide. Leur résultat théorique basé sur la théorie de [Wagner](#) est en bon accord avec les expériences de [Nethercote et al.](#).

Cet anglicisme que l’on pourrait traduire par *tossage* ou encore *tapement* en français, désigne l’impact de la coque d’un navire sur la surface de la mer. Ce type d’évènement se produit lorsqu’un bateau se trouve sur la crête d’une vague et que la proue après avoir brièvement décollé s’écrase lourdement sur l’eau comme suggéré Fig. 1.19(a). Le tossage induit des efforts très importants sur la structure des navires et doit être pris en compte lors de leur conception. Les résultats théoriques de [Howison et al.](#) sont en bon accord avec les expériences de [Nethercote et al.](#) consistant à enregistrer la pression sur une quille de section quasi-parabolique en plusieurs endroits à l’aide de capteur (Fig. 1.19(b)).

Remarque sur le calcul de [Howison et al. \(1991\)](#) :

[Howison et al.](#) montrent que dans le cas de l’impact d’un solide dont le profil est parabolique la loi du mouvement de la ligne de contact correspondant à l’évolution du rayon de la plaque plane équivalente de la théorie de Wagner est donnée par la relation $d(t) = \sqrt{2t}$. Nous verrons dans le chapitre suivant que le préfacteur $\sqrt{2}$ provient du caractère bidimensionnel du modèle de [Howison et al.](#).

1.4.2 Aspects impulsionnels de l’impact

Un point de vue complémentaire à la théorie de Wagner est de considérer qu’un impact est un phénomène impulsif dans le sens où une des frontières d’un domaine fluide va subir une accélération très importante sur des temps très courts suite à un choc avec un solide. Ceci engendre de forts gradients de pression qui induisent un changement de vitesse brutal dans le fluide. On en déduit que dans l’équation de conservation de la quantité de mouvement, le gradient de pression équilibre seul la variation temporelle de la vitesse. Cette approche permet d’expliquer de nombreux phénomènes (Fig. 1.20)



FIGURE 1.20 – Exemple de phénomènes pouvant être expliqués par l’approche impulsienne. (a) Jeu du ricochet (Bocquet 2003; Clanet *et al.* 2004). (b) La course du lézard Jesus Christ sur l’eau (Glasheen et McMahon 1996; Hsieh et Lauder 2004). (c) La formation d’un jet induit par le choc d’un tube à essai rempli de fluide mouillant (Figure 1 de Antkowiak *et al.* (2007)). La cavité formée lors de la chute libre se referme et engendre un jet.

comme le jeu du ricochet (Bocquet 2003; Clanet *et al.* 2004) ou encore la capacité du basilic à plumes (*Basiliscus plumifrons*), aussi appelé lézard Jésus Christ, à courir sur l’eau (Glasheen et McMahon 1996; Hsieh et Lauder 2004). Ce point de vue a également été utilisé avec succès par Antkowiak *et al.* (2007) qui ont étudié le jet induit par le choc contre un solide rigide d’un tube à essai rempli d’un liquide mouillant. En effet, lors de sa chute libre la surface du liquide contenu dans le tube a une forme hémisphérique grâce à l’action de la tension de surface. Lors de l’impact du tube, une onde de pression se propage dans le liquide, se focalise dans le fond de la cavité et entraîne un changement brutal de la courbure de l’interface ce qui induit la formation d’un jet. Leur interprétation ainsi que leurs développements théoriques reposent sur la notion de pression impulsienne (Batchelor 1967) que nous développerons au chapitre 4. Ce point de vue fournit une description exacte du champ de vitesse dans le liquide au moment de l’impact. Ils montrent également que la dynamique initiale du jet ne dépend pas de la tension de surface et de la viscosité, confirmant le bien-fondé de l’approche inertielle.

A l’origine, le principe de la formation d’un jet par le retournement brutal d’une interface provient de l’expérience de charge creuse de Pokrovski. Cette idée a par la suite été appliquée pour la création de munitions de charge creuse afin de pouvoir percer le blindage d’un tank par exemple (Lavrentiev et Chabat 1980). L’exemple du ricochet a lui aussi été appliqué à un contexte militaire à plusieurs périodes de l’histoire. Ce principe a été notamment utilisé dans le cadre de l’artillerie navale pour augmenter la portée des tirs de canons grâce aux nombreux rebonds que faisait les boulets à la surface de l’eau (de Jonquières 1883). La même idée fut utilisée par les Alliés lors de la seconde guerre mondiale pour détruire un certains nombres de barrages. Un escadron spécialisé dans cette activité et dont les membres étaient surnommés les *Dam-Busters* utilisaient un système très astucieux leur permettant de faire tourner à grande vitesse une bombe dans un avion qu’ils larguaient ensuite à la surface de l’eau. La bombe après plusieurs rebonds pouvait ainsi atteindre plus facilement le barrage, couler et exploser de façon à le détruire ou à l’endommager (Johnson 1998; Whalley 2002). Nous ne pouvons pas clore

ce paragraphe militaire sans rappeler l'approximation $\pi \approx 3.2$ utilisée par les artilleurs que nous retrouverons plus tard au chapitre 4.

1.5 Méthodologie

L'objectif de cette thèse est d'essayer d'obtenir une description théorique aux temps courts du problème de l'impact de goutte nous permettant d'avoir une meilleure compréhension de ce phénomène. Cela nécessite une modélisation fine du problème. Nous nous servons pour cela de simulations qui font office de véritables expériences numériques et qui nous serviront également d'élément de comparaison vis à vis de nos prédictions théoriques. Dans cette étude nous avons utilisé pour cela le logiciel libre *Gerris* (Popinet 2003, 2009) qui est un solveur des équations de Navier-Stokes permettant de traiter les problèmes diphasiques et tenant compte de la tension de surface. L'interface est construite avec la méthode de suivi en volume VOF (Volume-of-Fluid) (Li 1995; Scardovelli et Zaleski 1999) et le code permet d'utiliser le principe du maillage adaptatif pour réduire les coûts de calcul.

Cette démarche s'accompagne d'une utilisation de l'analyse asymptotique qui permet de dégager à l'ordre dominant les mécanismes essentiels à la bonne compréhension du phénomène étudié. Lorsque cela est possible nous déterminons des solutions analytiques pour ce problème. Dans le cas où cela n'est pas possible nous privilégions une approche numérique pour la résolution de l'équation de Laplace que nous rencontrerons souvent dans le présent manuscrit. Nous avons choisi pour cela le logiciel libre *FreeFem++* qui s'appuie sur la méthode des éléments finis.

Le résultat final sera mis en perspective aussi souvent que possible avec des résultats expérimentaux déjà connus comme ceux proposés dans les articles de Engel (1955) ou Rioboo *et al.* (2002). Pour le chapitre 4 nous proposons nous même une nouvelle expérience pour illustrer de nouveau les liens profonds existants entre le problème de l'impact de goutte et les autres problèmes d'impact.

1.6 Plan de la thèse

Dans cette thèse nous nous intéressons à l'impact de goutte sur une surface solide en mettant l'accent sur les analogies qui existent avec d'autres problèmes d'impact. Ce point de vue sera largement développé dans le chapitre 2 qui sera l'objet d'une étude théorique et numérique de ce problème pour les temps courts. Nous montrerons que pour les instants primordiaux de l'impact le problème admet une solution semblable (ou

"autosimilaire") et nous déterminerons les champs de vitesse et de pression dans la goutte ainsi que la structure de l'écoulement. Cette théorie non visqueuse sera raccordée à une solution de couche limite fondée sur une analogie avec la couche limite générée par une onde de choc. Nous proposerons des prédictions théoriques que nous comparerons dès qu'il le sera possible à des solutions numériques obtenues avec le logiciel *Gerris* (Popinet 2003, 2009).

Le chapitre 3 sera le prolongement immédiat du problème aux temps courts avec une étude de la perte d'autosimilarité pour les temps intermédiaires *i.e* correspondant aux temps $t \sim \tau = R/U$. Nous proposerons trois possibilités pour expliquer ce phénomène puis en adaptant le modèle développé au chapitre 2, nous résoudrons numériquement le problème à l'aide du code **FreeFem++** (Hecht 2012) ce qui nous permettra de mettre en évidence la cause de la fin du régime étudié précédemment.

Le chapitre 4 traitera d'une étude d'évolution aux temps longs avec le cas particulier de l'impact d'une goutte sur un support de taille comparable à cette dernière. Afin de poursuivre l'analogie avec les problèmes d'impact, nous revisiterons l'étude de (Rozhkov *et al.* 2002) avec une approche impulsionnelle. D'autre part une analogie avec les cloches liquides de Savart (1833a) sera exposée à partir de résultats expérimentaux. Dans un premier temps nous résoudrons le problème aux temps courts par une approche impulsionnelle et nous proposerons enfin quelques pistes de réflexions pour l'étude post-impact.

Le chapitre 5 sera une très brève introduction aux impacts de goutte de fluides viscoplastiques. Nous préciserons tout d'abord le domaine de validité de la théorie présentée au chapitre 2 dans ce nouveau contexte. Enfin, à l'aide d'expériences numériques nous allons proposer quelques pistes de recherche concernant notamment le rayon maximal atteint par la goutte ou la structure interne de l'écoulement.

Chapitre 2

Solutions semblables aux temps courts

2.1 Introduction

In the previous chapter we brought to mind that a theoretical description of the early stages of drop impact is still lacking. However we mentioned few experimental studies giving depictions of the geometrical aspect of the drop at the very beginning of the impact. First of all, [Rioboo *et al.* \(2002\)](#) evidenced a “kinematic phase” where the drop merely resembles a truncated sphere and spreads as the square-root of time. They noticed that this phase precedes the apparition of the liquid lamella. Few decades earlier [Engel \(1955\)](#) captured the chronology of events triggered by drop impact. He noted in particular the unvarying shape of the drop apex during the earliest moments of impact, which might be surprising due to the incompressible character of the liquid. [Engel](#) put forward the possible roles of inertia, viscosity or surface tension to explain this observation. These two studies give us some precious clues and are a good starting point for a modelling of this problem.

The physical mechanism underpinning the unexpected behaviour exhibited by [Engel](#) is best illustrated with Figure 2.1a. There, the numerically computed pressure field within an impacting drop is represented shortly after impact (details to follow in the chapter). It is readily seen that the structure of the pressure field is extremely concentrated near the contact zone, as in Hertz’ classic elastic contact problem ([Hertz 1882](#)). Conversely the outer region is essentially pressureless. This strong inhomogeneity in the pressure distribution therefore explains why, in the absence of any pressure hindrance, the upper part of the drop freely falls even after impact while remaining undeformed.

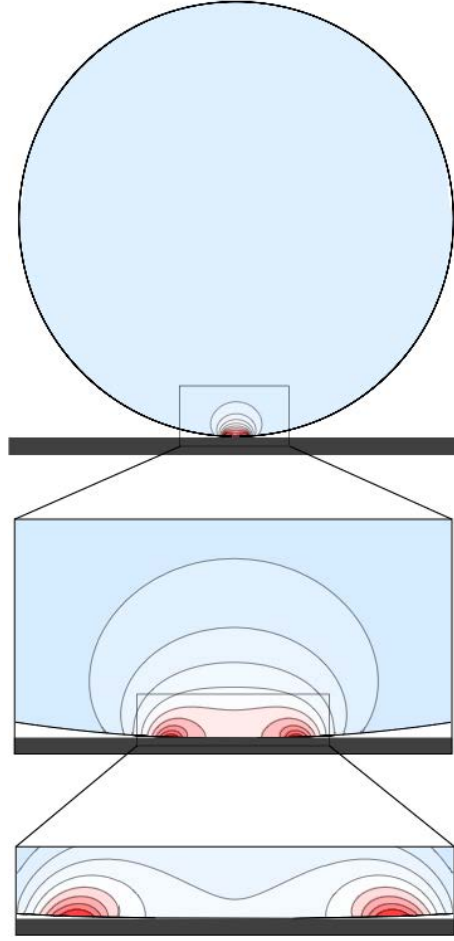


FIGURE 2.1 – Close-ups of increasing magnitude on the pressure field developing inside an impacting drop in the inertial limit. The pressure field is extracted from Navier-Stokes *Gerris* computations of a drop impacting a solid surface at early times (note that the surrounding gas dynamics is computed as well, but not represented here). Noticeably the motion is essentially pressureless (and therefore corresponds to a free fall) except in a concentrated region in the contact zone. The successive close-ups on pressure field structure in the contact region reveal a pressure peak near the contact line (the physical parameters are here $Re = 5000$, $We = 250$, $tU/R = 4 \times 10^{-4}$. The total size of the numerical axisymmetric domain is $2R \times 2R$, and the adaptive mesh has locally a mesh density corresponding to 32768×32768 grid points).

The pressure concentration in the early stages of impact was first identified by [Josserand et Zaleski \(2003\)](#). From the key remark that the extent of the pressure concentration zone scales with the contact radius, these authors conjectured a self-similar structure for the pressure field and evolution with time as $1/\sqrt{t}$ – an hypothesis confirmed by numerical results. Though sufficient to detect hints of self-similarity, numerical simulations were nonetheless unable to reveal the inner structure of the contact zone until recently, essentially because of the very large scale ratio between this zone and the drop size. The increase of computational performance along with the development of adaptive numerical techniques for two-phase flows ([Popinet 2009](#)) now allow to unravel the intimate structure of the contact zone, see Figures 2.1b,c and 2.2. These snapshots reveal a quite complex structure for the pressure, which counter-intuitively exhibits sharp maxima near



FIGURE 2.2 – Top : Time sequence of the pressure field developing inside an impacting drop (Navier-Stokes *Gerris* computation, fixed spatial magnification). Bottom : Corresponding trace of the pressure exerted by the drop on the solid substrate. The physical parameters for this simulation are $Re = 5000$ and $We = 250$. The snapshots correspond respectively to times $tU/R = 10^{-4}, 10^{-3}$ and 10^{-2} .

the contact line, and not on the axis as in steady stagnation point flows. Interestingly this structure is reminiscent of typical pressure field structures observed in the water entry of solid objects, and evidenced by Wagner in the context of alighting seaplanes (Wagner 1932). As explained in the previous chapter, in such problems a solid object impacts a flat liquid surface at a given velocity. Drop impact may be viewed as water entry's opposite, for a liquid object impacts a rigid flat surface at a given velocity (see Fig. 2.3). It is therefore likely that the analytical techniques developed since the thirties to describe with great precision the flow generated with the impact of an object, and proven to be in close agreement with experimental data (Howison *et al.* 1991), could be transposed for the drop impact problem. And indeed, building up on the analogy between water entry and drop impact, Howison *et al.* (2005) proposed a theoretical investigation of two-dimensional drop impact on a thin fluid layer and described the different regions and scalings of importance for the flow dynamics. In particular, they reveal the radius of contact between the two liquids as a key length scaling the problem, analogously to the problem of water entry where the wet length of the solid is also determining and consistently with the observations of Josserand *et al.* Zaleski (2003).

The central motivation of the present chapter is to revisit the problem of a single spherical drop impacting a smooth flat solid surface at early times at the light of Wagner's theory of impact, understand the dynamic fields structure and elucidate the short-time self-similar behaviour discerned in earlier studies. To develop a consistent theory, the approach followed throughout this thesis will be to confront and cross-test systematically the theoretical predictions with detailed and accurate numerical simulations performed with a Navier-Stokes multiphase flow solver. In §2 we formulate the hypotheses and theoretical framework of the problem, and describe the short-time drop impact dynamics in the context of Wagner's theory. Then in §3 we demonstrate that the Wagner flow can be recast as a self-similar solution for the drop impact problem. The nature of the near-axis stagnation flow and of the near contact line flow and pressure maxima are also discussed. Numerical results obtained with *Gerris* are compared with the theoretical prediction. The structure of the boundary layer is examined in §4. We conclude in §5 by discussing the obtained results and the limits of the present investigation (such as the role of air).

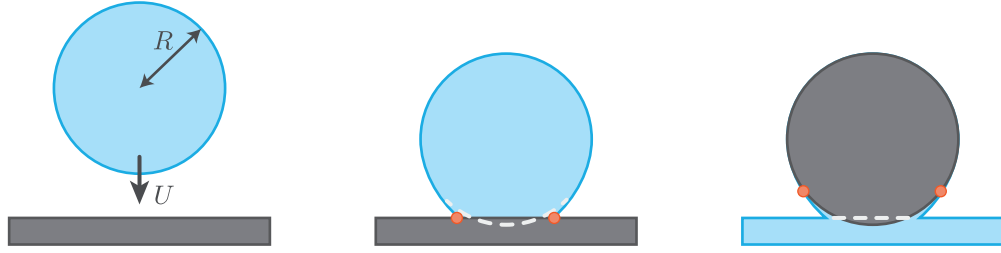


FIGURE 2.3 – Sketch of the impacting drop before contact (left), and shortly after impact (middle). The shape the drop would assume in absence of wall is outlined with a dashed line, and the contact line position is marked with red dots. This problem may be viewed as the dual of the classic water entry of a solid object (right).

2.2 Model

2.2.1 Theoretical framework & hypotheses

We consider throughout this study an idealized drop impact where a perfectly spherical liquid drop collides with a flat rigid surface. Though classic, this model situation relies on a number of physical hypotheses detailed in the following. Starting with the initial perfect spherical shape assumption, we may identify several typical causes for deviations from sphericity such as capillary drop oscillations during free fall ([Engel 1955](#); [Thoroddsen et al. 2005](#)) or flowing air shaping ([Pruppacher et Beard 1970](#)). Such effects will be disregarded in the following even though they merely result in a local curvature radius modification in the contact region, hence could easily be incorporated in the discussion.

As explained in chapter 1 the following discussion will be limited to those cases where the impact velocity is much lower than the speed of sound, as the falling raindrop, where acoustic effects can harmlessly be neglected and an incompressible description remains accurate ($\text{Ma}^2 \ll \frac{Ut}{R} \ll 1$). The high pressure and stresses generated upon impact can result in marked erosion or yielding ([Rein 1993](#)). Furthermore substrate deformation has recently been shown to significantly alter drop impact in the limit of very soft ([Mangili et al. 2012](#)) or very flexible substrates ([Antkowiak et al. 2011](#)). None of these effects will be considered in the following, yet an estimation of the net force exerted by the impacting drop on the underlying substrate will be provided in §2.3. Another phenomenon potentially responsible for the cushioning of the impact is the thin air layer between the drop and the substrate just before impact. Due to lubrication effects, this air layer pressurizes and dimples the drop, eventually yielding a tiny entrapped gas bubble in the drop ([Thoroddsen et al. 2005](#)). This phenomenon along with other roles of surrounding gas in impact dynamics will be disregarded in the forthcoming analysis (except explicitly specified, the starting state for each of the simulations is a drop already touching the ground – see Appendix A for details) and discussed in the last section.

Finally the core hypothesis of the present study is the inertia-dominated character of impact. In particular, we assume that gravity, capillary and viscous effects are small with respect to inertial ones, *i.e.* Froude $Fr = U^2/gR$, Weber $We = \rho U^2 R/\sigma$ and Reynolds $Re = \rho U R/\mu$ numbers are all large with respect to unity. Here g denotes the gravity, σ the liquid-gas surface tension, ρ the liquid density and μ its viscosity. These assumptions underpin the choice a purely inertial description free of these effects in the following. However, locally these phenomena might become more important or even dominant, examples being viscosity near the boundaries or capillarity in high-curvature region. In section §4 we will address viscous effects and develop a boundary-layer correction to the inviscid solution, and capillary effects will eventually be discussed in §5.

2.2.2 Governing equations and analogy with the water entry problem

2.2.2.1 Problem statement

We consider a perfectly spherical liquid drop of radius R and density ρ impacting normally a flat rigid ground with velocity U , see Fig. 2.3. Neglecting for now the development of viscous rotational boundary layers, we assume that the fluid motion following impact is irrotational, axisymmetric and can be described with the scalar potential $\phi(r, z)$, *i.e.* the fluid velocity $\mathbf{u}(r, z)$ satisfies $\mathbf{u}(r, z) = \nabla\phi(r, z)$. Incompressibility requires ϕ to be an harmonic potential satisfying Laplace's equation, here written in cylindrical coordinates :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \quad (2.1)$$

The liquid dynamics obeys the unsteady form of Bernoulli's conservation equation :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{p}{\rho} = \text{const}. \quad (2.2)$$

This set of equations is completed by appropriate boundary equations. At the wall $z = 0$, the condition of impermeability reads

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \text{ for } 0 \leq r \leq d(t), \quad (2.3)$$

where $d(t)$ stands for the contact line position, an unknown of the problem. The position of the free surface is tracked with the kinematic condition :

$$\frac{dS}{dt} = 0, \quad (2.4)$$

where $\mathcal{S}(r, z, t)$ is a function vanishing on the free surface. Expressing normal stress continuity at this interface yields the following dynamic boundary condition :

$$p = 0 \text{ at the free surface.} \quad (2.5)$$

Note that atmospheric pressure as here been taken as the reference pressure.

Anticipating the forthcoming analysis of the contact region, we further note that the free fall behaviour outside the contact region can be recast into the following far-field condition :

$$\phi \rightarrow -Uz \text{ far from the contact region.} \quad (2.6)$$

This condition allows to identify the constant in (2.2) as $\frac{1}{2}U^2$.

Now nondimensionalising the problem using the inertial scales R , ρ and U , we introduce the following quantities :

$$r = R\bar{r}, \quad z = R\bar{z}, \quad t = \frac{R}{U}\bar{t}, \quad \phi = UR\bar{\phi}, \quad p = \rho U^2 \bar{p}, \quad (2.7)$$

and rewrite the equations into their dimensionless counterparts :

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{z}^2} = 0 \quad \text{in the liquid,} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{t}} + \frac{1}{2} |\bar{\nabla} \bar{\phi}|^2 + \bar{p} = \frac{1}{2} \quad \text{in the liquid,} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{z}}(\bar{r}, \bar{z} = 0, \bar{t}) = 0 \quad \text{over the wet area } \bar{r} < \bar{d}(\bar{t}), \quad (2.10)$$

$$\bar{p} = 0 \quad \text{on the free surface,} \quad (2.11)$$

$$\frac{d\bar{\mathcal{S}}}{d\bar{t}} = 0 \quad \text{on the free surface.} \quad (2.12)$$

Finally the nondimensional far-field condition reads :

$$\bar{\phi} = -\bar{z} \quad \text{far from the contact region.} \quad (2.13)$$

As posed, the problem entirely depends on the wet area extent $\bar{d}(\bar{t})$, whose dynamics has still to be determined. In the following, we investigate the near-contact line flow to clarify this wetting dynamics.

2.2.2.2 Contact line motion : numerical observations

To shed light on the contact line dynamics, detailed numerical simulations of impacting drops were carried out with *Gerris* (see Appendix A). Figure 2.4 represents typical

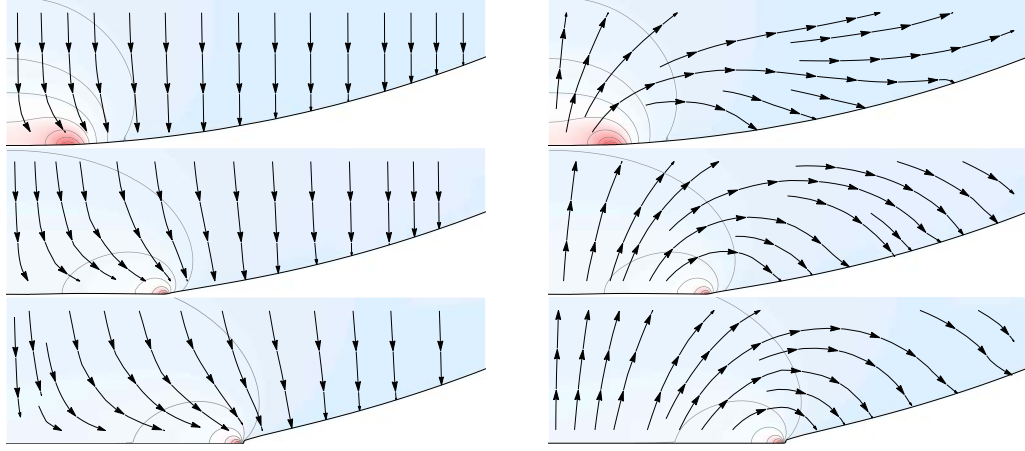


FIGURE 2.4 – Flow in an impacting drop in the fixed frame and in the drop frame computed with *Gerris*. Left, top to bottom : Streamlines and pressure map within an impacting drop for $Re = 5000$ and $We = 250$ in the laboratory frame at different post-impact times ($\bar{t} = 5 \times 10^{-4}$, 5×10^{-3} and 10^{-2}). The overall velocity field resembles a stagnation point flow in a near-wall region whose extent is scaling with the wet area, and a uniform downwards flow outside. Right : Same velocity field in a reference frame moving with the drop initial velocity, evidencing a bypass motion near the contact line and an overacceleration of the free surface towards the wall.

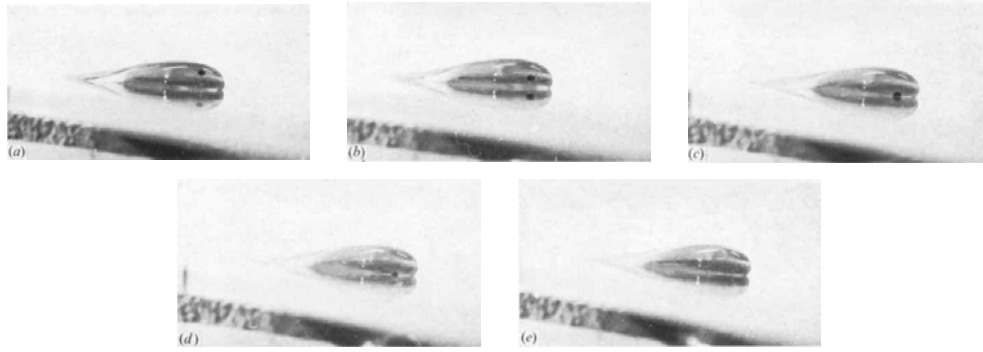


FIGURE 2.5 – Figure 5 extracted from [Dussan V. et Davis \(1974\)](#) who exhibit a tank-treading motion in the vicinity of the contact line for a honey drop moving downward along an inclined surface. Unlike our study the Reynolds number is very low in this case.

streamlines extracted from the simulations, shortly after impact. On the left panel it can be seen that the motion within the impacting drop far from the contact zone is vertical, uniform and pointing downwards, corresponding merely to the free flight behaviour $-U\mathbf{e}_z$. Near the wall though, the flow is deflected and exhibits a stagnation point-like structure, in a region whose extent scales with the wet area. To investigate further the nature of this corrective flow, we represent on the right panel of Fig. 2.4 the streamlines in a reference frame moving with the initial velocity of the drop. There it appears that the flow winds around the contact line, revealing that (i) the liquid near the contact line falls faster than free-flight and (ii) rather than being pushed by a sweeping motion, the contact line progresses via a tank-treading movement, analogous to the rolling motion evidenced in previous studies of advancing contact lines as [Chen et al. \(1997\)](#) or [Dussan V. et Davis \(1974\)](#). The last one gave a very nice experimental illustration

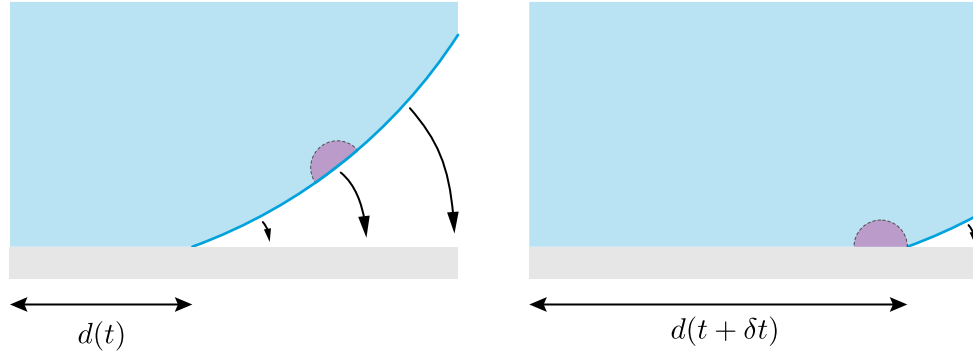


FIGURE 2.6 – Advancing contact line shortly after impact. In the earliest moments following impact, the motion of the free surface near the contact zone is essentially directed downwards. The sketches show the position of the contact line for two successive instants, and illustrate the fact that the horizontal extension of the wet area is governed by the vertical movement of the interface.

of this behavior for low Reynolds flow represented by Fig. 2.5. A drop of honey with a small mark of dye on its top is disposed on an horizontal Plexiglas surface. As soon as the surface is inclined the drop starts to move downward. The mark slides down the drop and then gets stuck to the surface. The trajectory of the mark evidences the rolling motion of the contact line reminiscent of a caterpillar vehicle as suggest by [De Gennes \(1985\)](#). [Mahadevan et Pomeau \(1999\)](#) studied a similar case where nonwetting viscous droplet rolls along an inclined plane. Numerically, this behavior was also observed in the context of spreading of drops by [Reznik et Yarin \(2002\)](#) where during the initial stage the motion is driven by gravity. For all these cases, the Reynolds number is very low so at the best of our knowledge, the rolling motion at the contact line we pointed out in our problem is the first case observed for high Reynolds flow.

These observations therefore suggest that the kinematics of horizontal extension for the wet radius is controlled by the vertical motion of the free surface. Figure 2.6 illustrates this process, and indicates that the law of motion of the contact line $d(t)$ can be obtained from the knowledge of velocity field at the free surface. Such a kinematic condition expressing the contact between a liquid surface and a solid object has actually been used in the context of the water entry of solid objects for about 80 years, and is currently referred to as *Wagner condition*. In the following we depict the analogies between these two liquid impact problems, and use them to derive a simple fluid mechanical model for the drop impact.

2.2.2.3 Analogy with the water entry problem

The modern understanding of the liquid motion and forces generated by an impacting object in water originates in the pioneering work of Wagner in the early thirties ([Wagner](#)

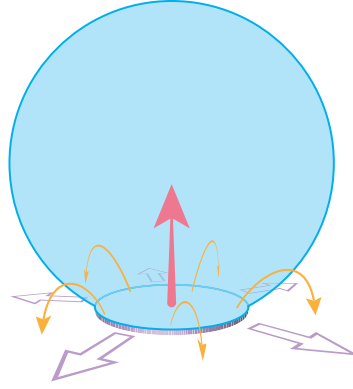


FIGURE 2.7 – In the reference frame of the falling drop, the flow induced by impact may be seen as the one induced by a flat rising disk (Lamb disk analogy). The winding motion is here represented with orange arrows, and the radial expansion of the disk with the wet area is indicated with purple arrows. The motion of the disk itself is given by the red arrow.

1932). The primary motivation of Wagner was to provide a detailed characterization of the impulsive forces generated with impact – already known to be of sufficient amplitude to induce bouncing (ricochet), and even possibly structural failure of alighting seaplanes or slammed ships (Nethercote *et al.* 1986). The foremost issue in this problem evidently stems from its highly unsteady and nonlinear nature. The central idea of Wagner was to model the flow induced by the impact of a float or a keel by the one induced by a flat “plate”, propelling the fluid particles downwards at the float or keel velocity, and having an extent growing with time as the waterline length. The corresponding flow (“*gleiche Tragflügelbewegung*” – equivalent aerofoil motion) is typically found to wind around the plate and therefore to promote jetting or splashing. The knowledge of this flow field then allows to determine the motion of the free surface, and finally provides the needed condition in the determination of the wet length $d(t)$.

Analogously, for the drop impact problem, our numerical simulations evidence similar flow features and winding motion. These observations advocate for the use of a water entry-analogue description, where the flow induced by drop impact would correspond to the one induced by a flat expanding disk in normal incidence, which extent is given the wet area (see figure 2.7). Following this vision of drop impact as a dual version of the water entry problem, we adopt from now on the corresponding formalism to describe the fluid mechanics of impact.

2.2.3 Leading-order description for the drop impact problem

Interested in the early-time behaviour of the impact-induced flow, we set out by examining time-dependent solutions of system (2.8–2.12) in the vicinity of the contact zone.

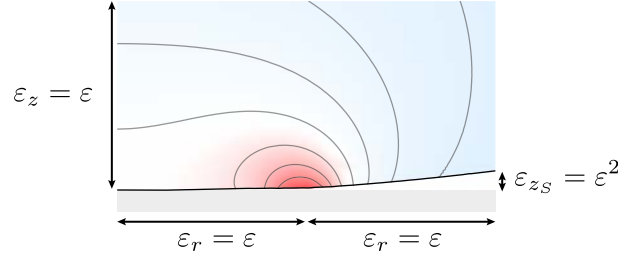


FIGURE 2.8 – Scalings in the contact zone. At the earliest times only a very small portion (of order ε) of the drop touches the wall. The fluid sets into motion with impact is in a region of extent ε in every direction. The air wedge confined between the wall and the drop presents an angle of order ε as well. The colormap illustrates the pressure distribution. The physical parameters for this simulation are $Re = 5000$ and $We = 250$. This snapshot corresponds to a nondimensional time $\bar{t} = 10^{-3}$. The position of the contact line is here $\bar{d} = 1.73 \cdot 10^{-3/2}$.

To this end, we introduce ε as a measure of the wet region : $d(t)/R = O(\varepsilon)$ (see Fig. 2.8). This ε is the fundamental small parameter without dimension of our problem.

As typical in two-phase phenomena, the lengthscales for the dynamical fields and for the geometry of the free surface differ in this problem. Starting by considering the space variables \bar{r} and \bar{z} on which depend the dynamical fields (such as the velocity potential ϕ or the pressure p), we introduce the following rescaling : $\bar{r} = \varepsilon_r \tilde{r}$ and $\bar{z} = \varepsilon_z \tilde{z}$, where \tilde{r} and \tilde{z} are $O(1)$ quantities and ε_r and ε_z are gauge functions. From the structure of Laplace operator, we expect the dynamical fields to display identical length scales in each direction, so that $\varepsilon_r = \varepsilon_z = \varepsilon$.

Insights into the relevant lengthscales for the description of the free surface geometry can be gained by decomposing the position of the surface into that of a translating sphere $\bar{z}_S(\bar{r}, \bar{t})$ plus a surface disturbance $\bar{h}(\bar{r}, \bar{t})$ (see Fig. 2.3b). Assuming the drop falls with constant velocity, the shape of the unperturbed translating sphere obeys $\bar{r}^2 + (\bar{z}_S - (1 - \bar{t}))^2 = 1$. Sufficiently close to the contact area, we introduce gauge functions for the vertical position of the moving sphere \bar{z}_S and the time \bar{t} : $\bar{z}_S = \varepsilon_{z_S} \tilde{z}_S$ and $\bar{t} = \varepsilon_t \tilde{t}$. The equation for the sphere surface can be approximated by $\varepsilon_{z_S} \tilde{z}_S = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \tilde{r}^2 - \varepsilon_t \tilde{t}$. As previously the determination of these scaling functions is obtained by dominant balance arguments : $\varepsilon_{z_S} = \varepsilon_t = \varepsilon^2$. Note that at short times the intersection radius between the sphere and the impacting plane is given by $\tilde{r}_{\text{intersect}} = \sqrt{2\tilde{t}}$.

We remark that as in the original study of Wagner, a scale separation between \bar{z}_S and \bar{z} exists (*small deadrise angle hypothesis*, see e.g. [Oliver 2002](#)). This scale separation arises because the drop typical radius of curvature ($O(1)$) is very large in front of the other lengthscales of the problem, see Fig. 2.8.

We now turn on to the surface perturbation $\bar{h}(\bar{r}, \bar{t})$, that embodies the impact-induced flow. Recalling that \bar{h} represents a perturbation around a falling sphere, we can express

the position of the free surface with the following implicit equation : $\bar{\mathcal{S}}(\bar{r}, \bar{z}, \bar{t}) = \bar{z} - (\bar{z}_S - \bar{h}(\bar{r}, \bar{t}))$. Introducing an appropriate gauge function ε_h such that $\bar{h} = \varepsilon_h \tilde{h}$ we obtain by dominant balance analysis that $\varepsilon_h = \varepsilon^2$. It follows that :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}}(\tilde{r}, \tilde{z}, \tilde{t}) &= \tilde{z} - \frac{1}{2} \tilde{r}^2 + \tilde{t} + \tilde{h}(\tilde{r}, \tilde{t}) \\ &= 0 \quad \text{on the free surface.} \end{aligned} \quad (2.14)$$

The kinematic boundary condition derives from the previous equation. At the free surface, we have :

$$\frac{d\bar{\mathcal{S}}}{d\bar{t}} = 1 + \underbrace{\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}}}_{\mathcal{O}(1)} - \underbrace{\varepsilon_\phi \tilde{r} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{r}}}_{\mathcal{O}(\varepsilon_\phi)} + \underbrace{\varepsilon_\phi \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{r}} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{r}}}_{\mathcal{O}(\varepsilon_\phi)} + \underbrace{\frac{\varepsilon_\phi}{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{z}}}_{\mathcal{O}(\varepsilon_\phi/\varepsilon)} = 0, \quad (2.15)$$

where $\bar{\phi} = \varepsilon_\phi \tilde{\phi}$. It is impossible here to keep all terms at the same order ; the dominant balance between the vertical velocities $\partial \tilde{h}/\partial \tilde{t}$ and $\partial \tilde{\phi}/\partial \tilde{z}$ implies that $\varepsilon_\phi = \varepsilon$. At leading order, the kinematic boundary condition is therefore reduced to :

$$1 + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{z}} + \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} = 0 \quad \text{on the free surface.} \quad (2.16)$$

It proves convenient to introduce a translation of the velocity potential such that $\tilde{\phi} = -\tilde{z} + \check{\phi}$. This translation merely accounts to analyse the problem in the falling-drop reference frame. The kinematic boundary condition is then simply rewritten as :

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} = -\frac{\partial \check{\phi}}{\partial \tilde{z}} \quad \text{on the free surface.} \quad (2.17)$$

Inserting these different scaled variables into Bernoulli's equation, we obtain :

$$\varepsilon_p \tilde{p} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \check{\phi}}{\partial \tilde{t}} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \check{\phi}}{\partial \tilde{r}} \right)^2 + \left(-1 + \frac{\partial \check{\phi}}{\partial \tilde{z}} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \quad \text{in the liquid,} \quad (2.18)$$

where $\bar{p} = \varepsilon_p \tilde{p}$. The scale of the pressure, $\varepsilon_p = \frac{1}{\varepsilon}$, is here seen to be as large as the contact zone is small – as expected in an impact problem. At leading order, Bernoulli's equation is therefore reduced to :

$$\tilde{p} = -\frac{\partial \check{\phi}}{\partial \tilde{t}} \quad \text{in the liquid.} \quad (2.19)$$

It follows from this equation that the constant pressure Dirichlet boundary condition on the free surface $p = 0$ can be recast as a condition for the potential at the free surface :

$$\begin{aligned}\bar{r} &= \varepsilon \tilde{r} & \bar{z} &= \varepsilon \tilde{z} & \bar{t} &= \varepsilon^2 \tilde{t} \\ \bar{p} &= \varepsilon^{-1} \tilde{p} & \bar{\phi} &= \varepsilon \tilde{\phi} & (\bar{u}, \bar{v}) &= (\tilde{u}, \tilde{v}).\end{aligned}$$

TABLE 2.1 – Résumé of the most important asymptotic scales of the problem.

$\phi = \text{const}$, where the constant is arbitrary. Without loss of generality, we set from now on this constant to zero.

Finally, as classic in water wave theory, we exploit the shallowness of the gap between the free surface and the plane to transfer the boundary condition at the free surface onto the plane (see *e.g.* [Van Dyke 1975](#), §3.8).

Summarizing, the near-field model problem takes the following expression :

$$\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial \check{\phi}}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{\partial^2 \check{\phi}}{\partial \tilde{z}^2} = 0 \quad \text{in the liquid,} \quad (2.20)$$

$$-\frac{\partial \check{\phi}}{\partial \tilde{t}} = \tilde{p} \quad \text{in the liquid,} \quad (2.21)$$

the locus $\tilde{d}(\tilde{t})$ of the contact line is determined with the Wagner condition :

$$\tilde{h}(\tilde{r}, \tilde{t}) = \frac{1}{2} \tilde{r}^2 - \tilde{t} \quad \text{for} \quad \tilde{r} = \tilde{d}(\tilde{t}), \quad (2.22)$$

so that the boundary conditions at $\tilde{z} = 0$ read :

$$\check{\phi} = 0 \quad \text{for} \quad \tilde{r} > \tilde{d}(\tilde{t}), \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} = -\frac{\partial \check{\phi}}{\partial \tilde{z}} \quad \text{for} \quad \tilde{r} > \tilde{d}(\tilde{t}), \quad (2.24)$$

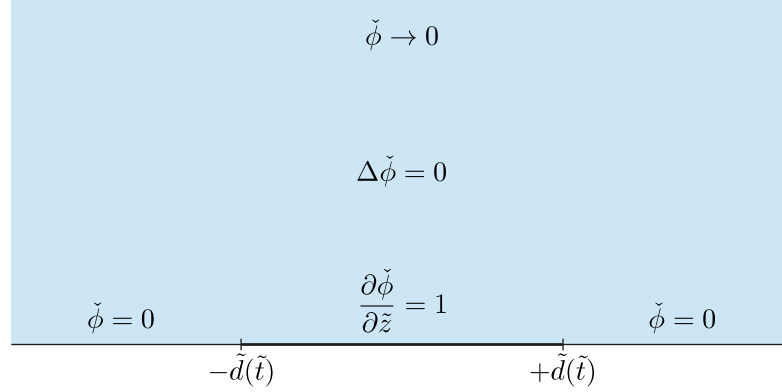
$$\frac{\partial \check{\phi}}{\partial \tilde{z}} = 1 \quad \text{for} \quad \tilde{r} < \tilde{d}(\tilde{t}), \quad (2.25)$$

and the far-field behaviour is given by :

$$\check{\phi} \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad \tilde{r}, \tilde{z} \rightarrow \infty \quad (2.26)$$

$$\tilde{h} \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad \tilde{r} \rightarrow \infty. \quad (2.27)$$

Finally the corresponding model geometry is sketched Fig. [2.9](#). We remark that the previous set of equations resembles to that of the classic water entry problem, and can be solved using the methodology described in *e.g.* [Oliver \(2002\)](#). In the next section though we will present an alternate method based on self-similar solutions.

FIGURE 2.9 – Leading order outer problem for times of order ε^2 .

2.3 Self-similar solutions and numerical simulations

2.3.1 A self-similar problem

To reveal the self-similar nature of our problem, we classically look in the following for scale invariance (Darrozès et François (1982)). We start by expressing the fact that any variable \tilde{q} in $(\tilde{r}, \tilde{z}, \tilde{t}, \check{\phi}, \tilde{h}, \tilde{d}, \tilde{p})$ can be rewritten as $\tilde{q} = \lambda_q \hat{q}$, where \hat{q} is a rescaled variable and λ_q a numerical stretching coefficient embodying the change of scale. Inserting these variables into the governing equations, it is straightforward to see that invariance of Laplace equation through this stretching requires $\lambda_r = \lambda_z$. Similarly, expressing the invariance of Wagner condition yields $\lambda_h = \lambda_t$, $\lambda_r = \sqrt{\lambda_t}$ and $\lambda_d = \sqrt{\lambda_t}$. The same operation performed on the additional boundary conditions finally imposes $\lambda_\phi = \sqrt{\lambda_t}$ and $\lambda_p = 1/\sqrt{\lambda_t}$. Note that λ_t remains here as the sole stretching parameter.

The pressure field can be written as an implicit function of time and space as follows : $\mathcal{F}(\tilde{p}, \tilde{r}, \tilde{z}, \tilde{t}) = 0$. Upon using the previous scale invariance arguments, this relation may be rewritten as $\mathcal{F}(\hat{p}/\sqrt{\lambda_t}, \sqrt{\lambda_t}\hat{r}, \sqrt{\lambda_t}\hat{z}, \lambda_t\hat{t}) = 0$. A simple algebraic manipulation allows to remove the λ_t dependence for all but one variables, so that finally $\mathcal{G}(\sqrt{\hat{t}}\hat{p}, \hat{r}/\sqrt{\hat{t}}, \hat{z}/\sqrt{\hat{t}}, \lambda_t\hat{t}) = 0$, for any λ_t . Remarking that for a given \hat{t} , this function has to cancel whatever the choice of the scale λ_t , it readily appears that the last variable is superfluous. In other words, a relation linking $\sqrt{\hat{t}}\hat{p}$ to $\hat{r}/\sqrt{\hat{t}}$ and $\hat{z}/\sqrt{\hat{t}}$ only must exist.

The pressure field may therefore be rewritten explicitly as :

$$\tilde{p} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{t}}} \mathcal{P} \left(\frac{\tilde{r}}{\sqrt{\tilde{t}}}, \frac{\tilde{z}}{\sqrt{\tilde{t}}} \right). \quad (2.28)$$

With a similar reasoning, and upon introducing the self-similar variables $\xi = \tilde{r}/\sqrt{\tilde{t}}$ and $\eta = \tilde{z}/\sqrt{\tilde{t}}$, we readily obtain :

$$\check{\phi}(\tilde{r}, \tilde{z}, \tilde{t}) = \sqrt{\tilde{t}} \Phi(\xi, \eta), \quad \tilde{h}(\tilde{r}, \tilde{t}) = \tilde{t} \mathcal{H}(\xi) \quad \text{and} \quad \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \sqrt{\tilde{t}} \delta, \quad (2.29)$$

where Φ and \mathcal{H} are unknown functions of the self-similar variables and δ a constant representing the (fixed) position of the contact line in self-similar space. This allows us to formulate the self-similar version of the drop impact problem :

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = 0 \quad \text{in the liquid,} \quad (2.30)$$

$$\mathcal{P}(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \left(-\Phi(\xi, \eta) + \xi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) \quad \text{in the liquid,} \quad (2.31)$$

the boundary conditions at $\eta = 0$ take the following form :

$$\mathcal{H} - \frac{1}{2} \xi \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \quad \text{for} \quad \xi > \delta, \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = 1 \quad \text{for} \quad \xi < \delta, \quad (2.33)$$

$$\Phi = 0 \quad \text{for} \quad \xi > \delta, \quad (2.34)$$

the far-field behaviour is :

$$\Phi \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad \xi, \eta \rightarrow \infty \quad (2.35)$$

$$\mathcal{H} \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad \xi \rightarrow \infty, \quad (2.36)$$

and the self-similar version of Wagner condition is finally given by :

$$\mathcal{H}(\xi) = \frac{1}{2} \xi^2 - 1 \quad \text{for} \quad \xi = \delta. \quad (2.37)$$

This problem can now be solved in several steps.

2.3.2 Self-similar potential

In this geometry, Laplace equation can be solved with variable separation, leading to a family of elementary cylindrical harmonic solutions with an exponential behaviour in η and an oscillatory one in ξ . We recombine by summation and obtain :

$$\Phi(\xi, \eta) = \int_0^\infty \mathcal{C}(k) J_0(k\xi) e^{-k\eta} dk. \quad (2.38)$$

The weight function $\mathcal{C}(k)$ is determined with boundary conditions (2.33) and (2.34), leading to the following pair of dual integral equations :

$$\begin{cases} \int_0^\infty k\mathcal{C}(k)J_0(k\xi) dk = -1 & \text{for } \xi < \delta, \\ \int_0^\infty \mathcal{C}(k)J_0(k\xi) dk = 0 & \text{for } \xi > \delta. \end{cases} \quad (2.39a)$$

$$\quad (2.39b)$$

Solving these dual integral equations using the technique described in Sneddon (1960), we obtain a closed-form expression for the weight function :

$$\mathcal{C}(k) = \frac{2}{\pi} \frac{\delta k \cos(k\delta) - \sin(k\delta)}{k^2} = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dk} \left(\frac{\sin(k\delta)}{k} \right). \quad (2.40)$$

Anticipating the description of the contact line dynamics, we now derive $\partial\Phi/\partial\eta$ at the substrate level $\eta = 0$:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{k\delta \cos(k\delta) - \sin(k\delta)}{k^2} J_0(k\xi) k dk, \quad (2.41)$$

where we recognize the sum of two Hankel transforms (see *e.g.* Sneddon 1995, table IV, page 528). This allows us to obtain the following explicit expression for $\partial\Phi/\partial\eta$ for $\eta = 0$:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} = 1 \text{ for } \xi < \delta \quad \text{and} \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} = -\frac{2}{\pi} \left(\frac{\delta}{\sqrt{\xi^2 - \delta^2}} - \arcsin\left(\frac{\delta}{\xi}\right) \right) \text{ for } \xi > \delta. \quad (2.42)$$

2.3.3 Wagner condition and contact line dynamics

With the help of the vertical velocity expression in the near wall region just derived, we can rewrite the kinematic boundary condition (2.32) as :

$$\mathcal{H}(\xi) - \frac{1}{2}\xi \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\xi}(\xi) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\delta}{\sqrt{\xi^2 - \delta^2}} - \arcsin\left(\frac{\delta}{\xi}\right) \right) \text{ for } \xi > \delta. \quad (2.43)$$

This inhomogeneous differential equation can be solved using variation of parameters, *i.e.* looking for a solution of the form $\mathcal{H}(\xi) = \xi^2 f(\xi)$. This gives :

$$\left[f(\xi) \right]_\delta^{+\infty} = -\frac{2}{\pi} \int_\delta^\infty \frac{2}{\xi^3} \left(\frac{\delta}{\sqrt{\xi^2 - \delta^2}} - \arcsin\left(\frac{\delta}{\xi}\right) \right) d\xi. \quad (2.44)$$

Upon using the far-field decaying behaviour of \mathcal{H} (see equation (2.36)), this last equation reduces to $f(\delta) = \frac{1}{2}\delta^{-2}$ so that at the contact line the drop deformation is :

$$\mathcal{H}(\delta) = \delta^2 f(\delta) = \frac{1}{2}. \quad (2.45)$$

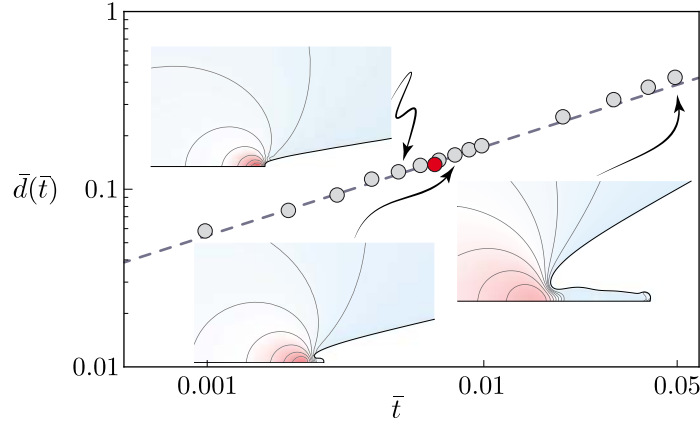


FIGURE 2.10 – Comparison between the theoretical position of the contact line as a function of time deduced from Wagner theory $\tilde{d}(\tilde{t}) = \sqrt{3}\tilde{t}$ (dashed line) and the position of the contact line extracted from *Gerris* computations of an impacting drop at $Re = 5000$ and $We = 250$ (grey dots). The red dot marks the birth of the corolla.

In the self-similar space, the Wagner condition therefore takes the following remarkably simple form :

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\delta^2 - 1, \quad (2.46)$$

from which we finally derive the position of the contact line :

$$\delta = \sqrt{3}. \quad (2.47)$$

It is interesting to remark that the contact line motion $\tilde{d}(\tilde{t}) = \sqrt{3}\tilde{t}$ just predicted within the framework of Wagner theory is quite close from the rough truncated sphere approximation $\tilde{r}_{\text{intersect}} = \sqrt{2\tilde{t}}$ (Riboux *et al.* 2002). Furthermore, and as for other liquid impact problems, we note that the agreement between this prediction and observations is fairly satisfactory. Indeed Fig. 2.10 reports early post-impact successive positions of the contact line extracted from numerical simulations performed with *Gerris* along with our theoretical prediction. Noticeably the superposition between theory and numerical results is excellent, at least until the moment of formation of a liquid corolla (here indicated with a red dot).

By using an analogy with Wagner theory in a similar way, Riboux *et Gordillo* (2014) obtained independently the same law of motion for the contact line. This result was a key element of their analysis for the study of splashing threshold for drop impact on a solid surface. However our analysis is a little bit more general because we obtained short time self-similar solutions and we will exploit the Wagner analogy to characterize precisely the pressure field and the flow structure inside the drop in this chapter. The position of the contact line was also determined experimentally by Riboux *et Gordillo*

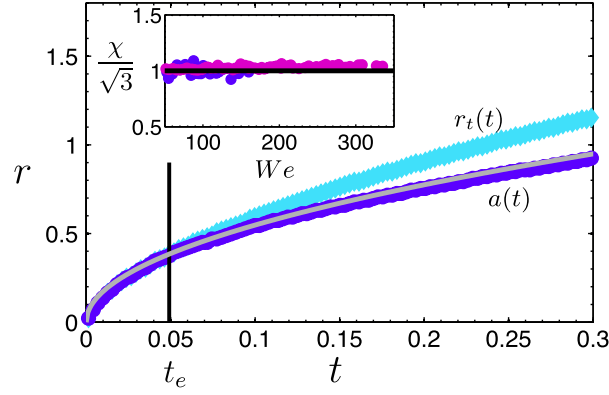


FIGURE 2.11 – Figure 2 extracted from [Riboux et Gordillo \(2014\)](#) representing the experimental radius of the wetted area compared with $d(t) = \sqrt{3t}$ (thin solid line) for $We=98$, $Re=3462$ (water drop). The experimental radial position of the ejecta sheet, r_t , is also represented for times $t \geq t_e$, with t_e the ejection time. The inset represents the ratio $\chi/\sqrt{3} \simeq 1$, where χ is the coefficient obtained from the best fit of a function of the type $a = \chi\sqrt{t}$ to the experimentally measured radius $a(t)$, for a large range of Weber numbers and two different liquids : water (blue dots) and a silicon oil (purple dots).

and a very good agreement is obtained with the theoretical law given by $d(t) = \sqrt{3t}$ until the birth of ejecta sheet as shown Fig. 2.11.

2.3.4 Analogy with the normal motion of an expanding disk in an infinite mass of liquid

In §2.2.2.3 we proposed to visualize the flow in an impacting drop as the one induced by a flat rising disk expanding radially as the wet area (see also Fig. 2.7). We are now in a position to formally justify this water-entry analogy. The axisymmetric flow induced by ‘the motion of a thin circular disk with velocity U normal to its plane, in a infinite mass of liquid’ is for example analysed in Lamb’s classic textbook §101 ([Lamb 1932](#)). After deriving some elementary axisymmetric solutions of Laplace equation of the form $\exp(\pm kz)J_0(kr)$ in §100, [Lamb](#) examined a variety of axisymmetric potential flows. Among those was the one (later connected to the flow around a flat circular disk in normal incidence) where at the symmetry plane $z = 0$ the potential takes the value $\phi = C\sqrt{a^2 - r^2}$ for $r < a$ and $\phi = 0$ for $r > a$, with a the disk radius. The solution for this problem was stated under the following integral representation :

$$\phi(r, z) = -C \int_0^\infty e^{-kz} J_0(kr) \frac{d}{dk} \left(\frac{\sin ka}{k} \right) dk. \quad (2.48)$$

And from ‘a known theorem in *Electrostatics*’, Lamb obtained the expression for the vertical velocity in the symmetry plane :

$$-\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{z=0} = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi C & \text{for } r < a, \\ C \left(\arcsin\left(\frac{a}{r}\right) - \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}} \right) & \text{for } r > a. \end{cases} \quad (2.49a)$$

This corresponds precisely to the flow within the impacting drop, after posing $C = -2/\pi$ and $a = \delta$, thereby justifying formally our initial analogy between the impact-induced flow with the one associated with a flat rising disk rapidly expanding with the wet area. Setting $C = 2U/\pi$, Lamb remarked that the above potential indeed describes the flow winding around a flat disk moving at velocity U . He further noted that a simple expression for the fluid half-space kinetic energy could be derived from the previous relation :

$$T_{\text{disk}} = \frac{4}{3}\rho a^3 U^2. \quad (2.50)$$

This expression can immediately be transposed into the (nondimensional) kinetic energy of the impact-induced flow within the drop :

$$\tilde{T} = 4\sqrt{3}\tilde{t}^{3/2}, \quad (2.51)$$

or, equivalently, into its dimensioned counterpart :

$$T = 4\sqrt{3}\rho U^{7/2} R^{3/2} t^{3/2}. \quad (2.52)$$

We emphasize that this expression is derived within the frame of the falling drop and, as such, represents the kinetic energy of the defect flow associated with impact. Although a direct physical interpretation of this quantity is not straightforward, we will see in §2.3.7 that the knowledge of this defect kinetic energy will allow for a direct determination of the impacting force.

2.3.5 Structure of the velocity field

We now investigate the structure of the velocity field in the contact region and search for exact closed-form expressions and convenient approximations for this field.

2.3.5.1 Integral representation of the velocity field

In the fixed frame, the velocity field $\tilde{\mathbf{u}}(\tilde{r}, \tilde{z}, \tilde{t})$ inside the impacting drop can formally be derived from the (untranslated) potential $-\eta + \Phi$. Following the arguments developed

in §2.3.1, this velocity field is simply related to the self-similar velocity field $\mathbf{U}(\xi, \eta)$ via the relation :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\tilde{r}, \tilde{z}, \tilde{t}) = \mathbf{U}(\xi, \eta). \quad (2.53)$$

where the components of the self-similar vector field $\mathbf{U} = (\mathcal{U}_\xi, \mathcal{U}_\eta)$ are :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_\xi(\xi, \eta) = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \\ \mathcal{U}_\eta(\xi, \eta) = -1 + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}. \end{cases} \quad (2.54a)$$

$$\quad (2.54b)$$

Inserting the expression of the self-similar potential determined previously yields the following integral representation for the vector field components :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_\xi(\xi, \eta) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sqrt{3}k \cos(\sqrt{3}k) - \sin(\sqrt{3}k)}{k} e^{-k\eta} J_1(k\xi) dk, \\ \mathcal{U}_\eta(\xi, \eta) = -1 - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sqrt{3}k \cos(\sqrt{3}k) - \sin(\sqrt{3}k)}{k} e^{-k\eta} J_0(k\xi) dk. \end{cases} \quad (2.55a)$$

$$\quad (2.55b)$$

A closed-form expression is unfortunately not accessible in the general case. In the following however we calculate the value of these integrals at some particular places.

2.3.5.2 Closed-formed expressions for the velocity field along the axis and the substrate

Simple analytical solutions for the velocity field can be obtained from (2.55) at precise locations. Along the symmetry axis for example, where $\xi = 0$, the properties of integrals of exponentials allow to write :

$$\mathcal{U}_\eta(\xi = 0, \eta) = -1 + \frac{2}{\pi} \left(\arctan \left(\frac{\sqrt{3}}{\eta} \right) - \frac{\sqrt{3}\eta}{3 + \eta^2} \right) \quad \text{for } \eta \geq 0. \quad (2.56)$$

This last result is confronted with numerical velocity profiles extracted from *Gerris* computations in Fig. 2.12. The nice agreement between the theoretical solution and the numerical profiles seen in the self-similar space (Fig. 2.12b) here holds over more than a decade in time.

Analogously, analytical forms for (2.55) can also be obtained along the substrate plane $\eta = 0$ by exploiting the properties of Hankel transforms (Sneddon 1995). An expression for the vertical velocity is already provided with equation (2.42), after inserting $\delta = \sqrt{3}$. We remark that this analytical solution elucidates the faster-than-free-flight motion of the free surface near the contact line discerned in §2.2.2.2. Likewise the radial velocity

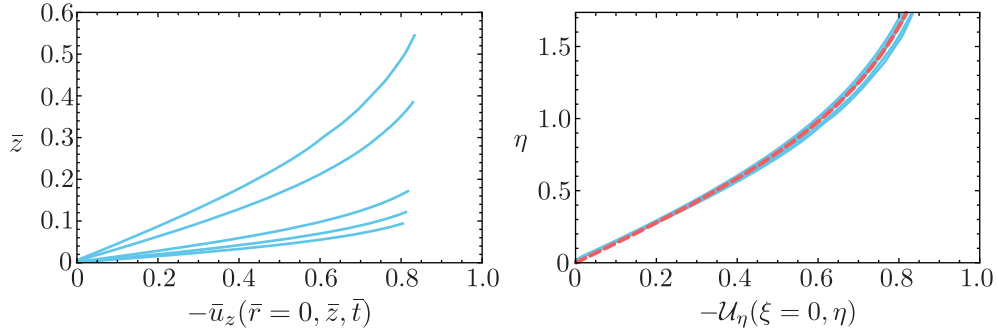


FIGURE 2.12 – Left : Axial velocity profiles along the axis extracted from *Gerris* computations at times $\bar{t} = 3 \times 10^{-3}, 5 \times 10^{-3}, 10^{-2}, 5 \times 10^{-2}$ and 10^{-1} . Right : Comparison between the analytical prediction for the axial velocity given by equation (2.56) (red dashed line) and numerical solutions obtained with *Gerris*, rescaled in the self-similar space (blue solid lines). The physical parameters for this simulation are $\text{Re} = 5000$ and $\text{We} = 250$.

distribution across the wet area is found to be :

$$\mathcal{U}_\xi(\xi, \eta = 0) = \frac{2}{\pi} \frac{\xi}{\sqrt{3 - \xi^2}} \quad \text{for } 0 \leq \xi < \sqrt{3}. \quad (2.57)$$

This unphysical inviscid slip velocity $\tilde{u}_e(\xi) = \mathcal{U}_\xi(\xi, \eta = 0)$ cannot be observed in our simulations encompassing viscous effects. But this quantity is nonetheless relevant for it corresponds to the edge velocity of the viscous boundary layer (studied in detail in §2.4).

2.3.5.3 An unusual stagnation point flow

In the very vicinity of the origin, the first order power series of the velocity field (2.55) reads :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_\xi(\xi, \eta) \simeq \frac{2}{\pi\sqrt{3}}\xi, \\ \mathcal{U}_\eta(\xi, \eta) \simeq -\frac{4}{\pi\sqrt{3}}\eta, \end{cases} \quad (2.58a)$$

$$\quad (2.58b)$$

or, equivalently, in dimensioned variables :

$$\begin{cases} u_r(r, z, t) \simeq \frac{2}{\pi\sqrt{3}} \sqrt{\frac{U}{R}} \frac{r}{\sqrt{t}}, \\ u_z(r, z, t) \simeq -\frac{4}{\pi\sqrt{3}} \sqrt{\frac{U}{R}} \frac{z}{\sqrt{t}}. \end{cases} \quad (2.59a)$$

$$\quad (2.59b)$$

Though simple, this peculiar structure for the impact-induced unsteady stagnation point flow is nonetheless counter-intuitive and could not have been inferred from simple dimensional analysis. Noteworthy enough, this result is at variance with the typical structure

of the later intermediate flow associated with spreading $\bar{\mathbf{u}} \simeq (\bar{r}/\bar{t}, -2\bar{z}/\bar{t})$ (see *e.g.* [Eggers et al. 2010](#); [Lagubeau et al. 2012](#); [Yarin et Weiss 1995](#)).

2.3.5.4 Beyond the stagnation point : a remark on the overall velocity field structure

The previous approximation for the impact flow is valid in a small region near the origin. To further investigate the limits of this representation we show [Fig. 2.13](#) different radial velocity profiles corresponding to various locations ξ . The collapse of the numerical profiles taken at various \bar{r} and \bar{t} (but such that $\bar{r}/\sqrt{\bar{t}} = \tilde{r}/\sqrt{\tilde{t}}$ is constant in each figure) onto the theoretical profiles is again an illustration of the relevance of the self-similar representation. But it is also to be noted that while the stagnation point ansatz disregards any radial velocity variation in η , the profiles exhibit a sensible variation along the vertical coordinate η . This variation is best depicted with [Fig. 2.14](#) where theoretical radial velocity profiles divided by $\tilde{u}_e(\xi)$ taken at different values ξ have been represented. Noteworthy enough, profiles corresponding to $\xi \lesssim 1$ collapse on a single curve. We therefore speculate that in this region the radial velocity can be approximated by a separated-variable solution such that $\mathcal{U}_\xi(\xi, \eta) = u_e(\xi)f(\eta)$ for $\xi \lesssim 1$, where f is a function capturing the whole dependence of the profile with the height. For larger values of ξ though, significant deviations from this behaviour arise and variable separation cease to hold : $\mathcal{U}_\xi(\xi, \eta) = \tilde{u}_e(\xi)g(\xi, \eta)$ for $\xi \gtrsim 1$ where g is a function satisfying $g(\xi, \eta = 0) = 1$, in order to recover the slip velocity for $\eta = 0$. We remark that the latter prediction remains particularly accurate across the contact region, even close to the contact line position $\xi = \sqrt{3}$.

2.3.5.5 Flow pattern, contact line bypass and Lamb analogy

We now define the self-similar stream function $\Psi(\xi, \eta)$ in the drop reference frame from the potential :

$$\begin{cases} \frac{1}{\xi} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \\ -\frac{1}{\xi} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}. \end{cases} \quad (2.60a)$$

$$\quad (2.60b)$$

By integration of the previous relations we deduce the following expression for $\Psi(\xi, \eta)$:

$$\Psi(\xi, \eta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sqrt{3}k \cos(\sqrt{3}k) - \sin(\sqrt{3}k)}{k^2} e^{-k\eta} \xi J_1(k\xi) dk, \quad (2.61)$$

up to a constant. Formally, $\Psi(\xi, \eta)$ is the stream function describing the winding flow

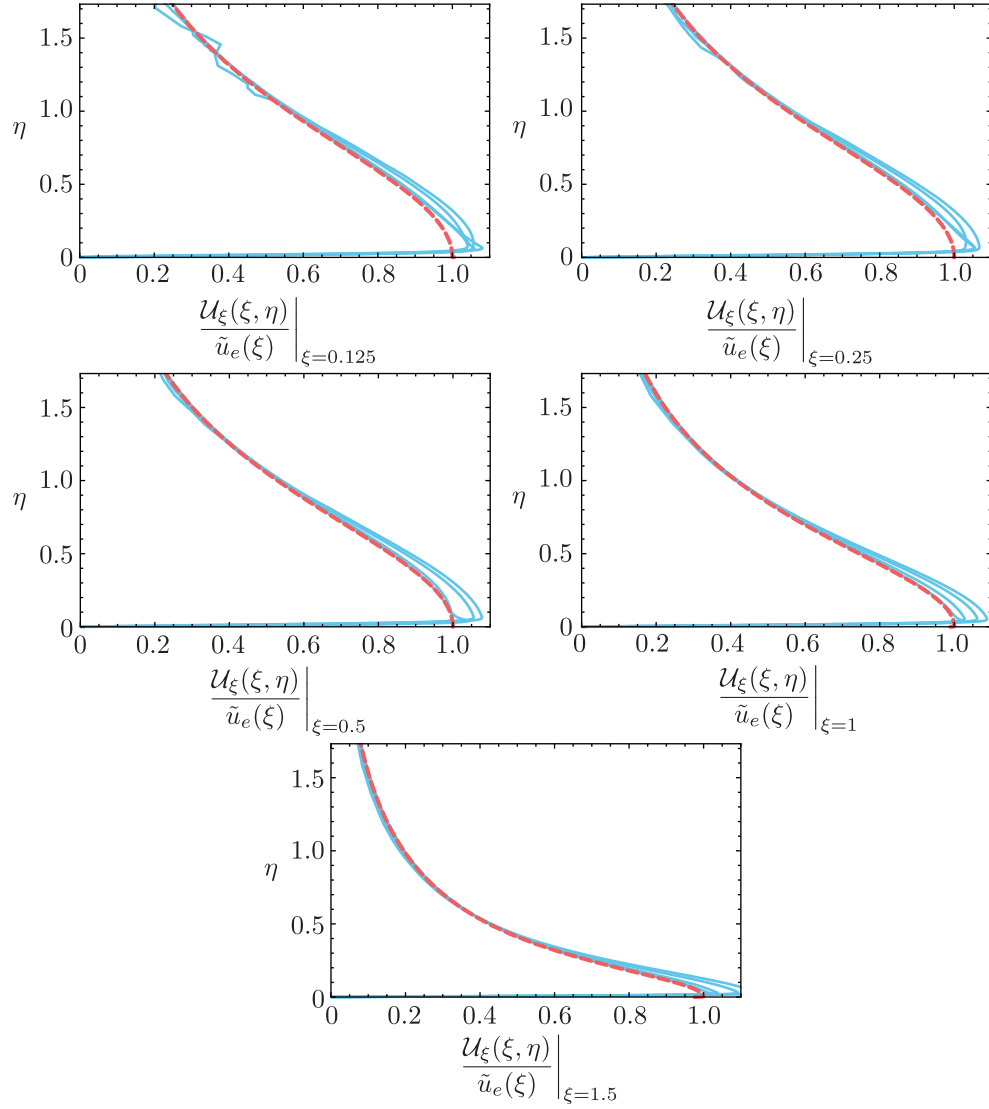


FIGURE 2.13 – Self-similar radial velocity as a function of η for $\xi = 0.125, 0.25, 0.5, 1$ and 1.5 . These velocities are rescaled by the outer solution of the boundary layer $\tilde{u}_e(\xi)$ given by equation (2.57). Blue solid lines represent the numerical solutions extracted from *Gerris* computations in the self-similar space for $\bar{t} = 5 \times 10^{-3}, 10^{-2}, 5 \times 10^{-2}$ and 10^{-1} ($\text{Re} = 5000$ and $\text{We} = 250$). The red dashed line represents the theoretical solution $\mathcal{U}_\xi(\xi, \eta)$ given by equation (2.55a). Note that the boundary layer is so thin that it is almost indistinguishable (see also Fig. 2.22).

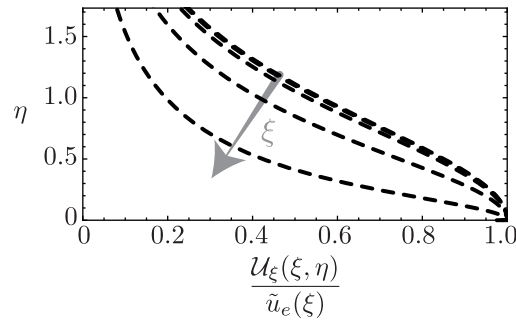


FIGURE 2.14 – Evolution of the analytical self-similar radial velocity given by equation (2.55a) as a function of η for $\xi = 0.125, 0.25, 0.5, 1$ and 1.5 . These velocities are rescaled by the outer solution of the boundary layer $\mathcal{U}_\xi(\xi, \eta = 0) = \tilde{u}_e(\xi)$, equation (2.57).

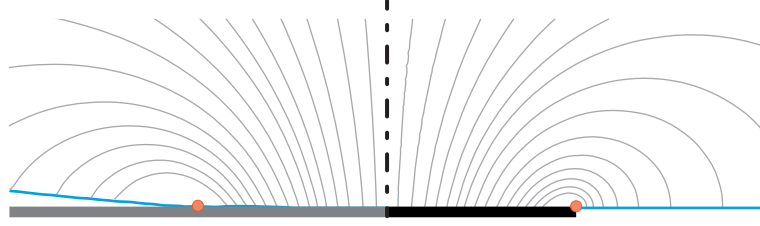


FIGURE 2.15 – Comparison between the flow pattern within an impacting drop (left) and around a rapidly expanding disk (Lamb analogy, right) in the self-similar space. In both cases, the streamlines are represented in the moving frame. The red dots represent the theoretical position of the contact line $\xi = \sqrt{3}$. The numerical streamlines represented on the left are derived from the velocity field computed with *Gerris* at $\bar{t} = 10^{-3}$ ($\text{Re} = 5000$ and $\text{We} = 250$). The theoretical streamlines shown on the right correspond to isovalues of $\Psi(\xi, \eta)$ defined in equation (2.61) (note the correspondence with Lamb’s figure page 145).

around a flat rising disk (Lamb 1932, §108). Figure 2.15 offers a comparison between the streamlines of this Lamb analogy and the ones computed with *Gerris* for the drop impact problem in the self-similar space. A good qualitative agreement between the analytical and the numerical streamlines is noticeable, comforting the expanding disk analogy followed here. Interestingly the winding motion around the contact line, as well as the falling velocity overshoot near this region, are both captured with this analogy and can be correlated with the peculiarities of the winding flow near the edge of a rising disk.

2.3.6 Self-similar pressure

From the knowledge of the velocity potential we are now in a position to derive the pressure field as the time derivative of the potential. In the self-similar space, the pressure field is given by equation (2.31). Figure 2.16 proposes a comparison between the structure of the self-similar pressure extracted from numerical computations performed with *Gerris* and the theoretical prediction. There it can be seen that the overall structure of the pressure field developing in the impacting drop, and in particular the pressure peak in the vicinity of the contact line already pinpointed out in Fig. 2.1, nicely matches with the theory. Interestingly, the structure just described is at variance with the pressure distribution around a flat disk rising steadily (Lamb’s original problem). Indeed in such a configuration the pressure is expected to be maximal in the stagnation point area, whereas in our model problem the pressure peaks near the contact line/disk edge. This is a consequence of the motion unsteadiness : the pressure is here dominated by the $\partial\check{\phi}/\partial\tilde{t}$ contribution rather than the steady $\frac{1}{2}\tilde{\nabla}\check{\phi}^2$ term.

As in §2.3.5.2, closed form expressions for the pressure can be obtained along the axis and the substrate plane. The radial structure of the self-similar pressure across the wet

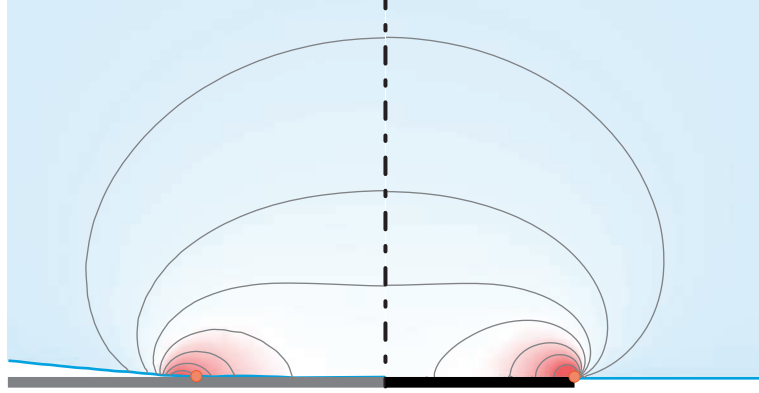


FIGURE 2.16 – Comparison between the pressure field developing inside an impacting drop (left) and around a rapidly expanding disk (Lamb analogy, right). The pressure field represented on the left is extracted from *Gerris* computations and represented in the self-similar space ($\bar{t} = 10^{-3}$, $\text{Re} = 5000$, $\text{We} = 250$; The isovalues are : 0.12, 0.24, 0.36, 0.48, 0.6, 0.72, 0.84). The self-similar theoretical pressure field represented on the right is given by equation (2.31) (isovalues : 0.13, 0.28, 0.445, 0.57, 0.73, 0.9, 1.2). Though isovalues have been slightly changed between the two panels, theoretical and numerical results are in a good overall agreement.

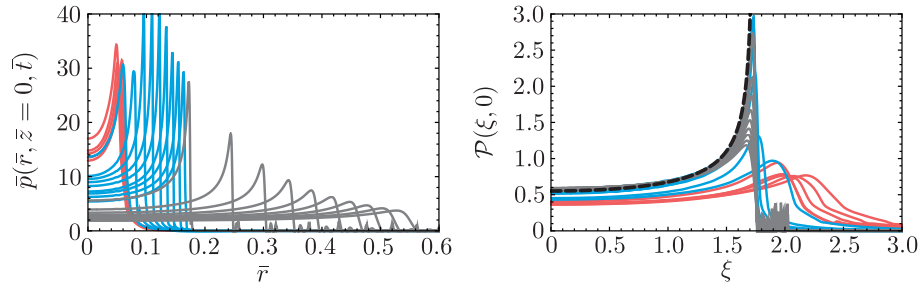


FIGURE 2.17 – Left : Pressure trace on the substrate $\bar{z} = 0$ obtained from the numerical simulations between $\bar{t} = 5 \times 10^{-4}$ and 10^{-1} for $\text{Re} = 5000$ and $\text{We} = 250$. The color code for each decade is the same as in Fig. 2.19. Note that the curves are equally distributed within each decade. Right : Same as in the left but in the self-similar space. The black dashed curve represent the analytical solution for $\mathcal{P}(\xi, \eta = 0)$.

area reads $\mathcal{P}(\xi, \eta = 0) = \frac{3}{\pi\sqrt{3-\xi^2}}$ for $0 \leq \xi < \sqrt{3}$. This analytical prediction is confronted with *Gerris* numerical results in Fig. 2.17. After a transient numerical initialization phase (corresponding to the red curves), the pressure profiles collapse on the self-similar analytical solutions (blue curves). In accordance with the overall pressure field structure depicted earlier, the pressure radial profile presents a local minimum at $\xi = 0$ and a maximum in the vicinity of the contact line, that is for $\xi = \sqrt{3}$ – where the analytical solution exhibits an inverse square-root singularity. We note that for later times the pressure peak is smoothed out in the numerical simulations (grey curves). As this regularization coincides with the birth of the ejecta sheet, we conjecture that this fall-off can appropriately be described with a second-order Wagner theory (Korobkin 2007; Oliver 2007).

Similarly the expression for the self-similar pressure along the symmetry axis can also be obtained analytically : $\mathcal{P}(\xi = 0, \eta) = \frac{3\sqrt{3}}{\pi(3+\eta^2)}$ for $\eta \geq 0$. Figure 2.18 compares this last

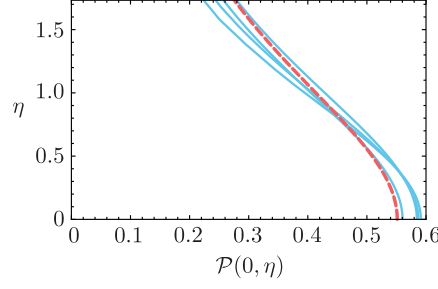


FIGURE 2.18 – Pressure along the axis $\tilde{r} = 0$ obtained with *Gerris* for $\tilde{t} = 5 \times 10^{-3}, 10^{-2}, 5 \times 10^{-2}$ and 10^{-1} (same as in Fig. 2.12 right) represented in the self-similar space ($\text{Re} = 5000$ and $\text{We} = 250$). The red dashed line is the analytical solution for $\mathcal{P}(\xi = 0, \eta)$. Fluctuations of the pressure around the theoretical prediction is to be related with numerical projections errors.

result with rescaled axial pressure profiles extracted from numerical simulations. There again the agreement between the computations and the theory is seen to hold for a large time span.

The structure of the pressure field in the vicinity of the origin can be inferred from these last results. Reexpressing the pressure cuts determined in terms of \tilde{r} , \tilde{z} and \tilde{t} , we get :

$$\begin{cases} \tilde{p}(\tilde{r}, \tilde{z} = 0, \tilde{t}) = \frac{3}{\pi\sqrt{3\tilde{t} - \tilde{r}^2}}, & (2.62a) \\ \tilde{p}(\tilde{r} = 0, \tilde{z}, \tilde{t}) = \frac{3\sqrt{3\tilde{t}}}{\pi(3\tilde{t} + \tilde{z}^2)}. & (2.62b) \end{cases}$$

From these two relations, we deduce the following expansion for the pressure near the origin :

$$\tilde{p}(\tilde{r}, \tilde{z}, \tilde{t}) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \tilde{t}^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\tilde{r}^2}{6\tilde{t}} - \frac{\tilde{z}^2}{3\tilde{t}} \right) + \dots \quad (2.63)$$

This expression provides with a local approximation for $\partial\tilde{\phi}/\partial\tilde{t}$ from which, after time integration and space differentiation, we readily recover the stagnation point flow structure found earlier : $(\tilde{u}_{\tilde{r}}, \tilde{u}_{\tilde{z}}) = \frac{2}{\pi\sqrt{3}}(\tilde{r}/\sqrt{\tilde{t}}, -2\tilde{z}/\sqrt{\tilde{t}})$. This near-axis behaviour emphasizes again that simple intuitive dimensional analysis suggestion r/t and $-z/t$ is here not relevant.

The leading order term for the pressure at the origin follows :

$$\tilde{p}(0, 0, \tilde{t}) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \tilde{t}^{-\frac{1}{2}}, \text{ or, with dimensions } p(0, 0, t) = \frac{\rho U^{3/2}}{\pi} \sqrt{\frac{3R}{t}}. \quad (2.64)$$

This result extends the $t^{-\frac{1}{2}}$ scaling law proposed by [Josserand et Zaleski \(2003\)](#) on the basis of scaling arguments. A comparison between this theoretical prediction and *Gerris* numerical simulations is proposed Fig. 2.19, using the color code of Fig. 2.17. After a numerical transient phase, the pressure rapidly reaches the self-similar regime.

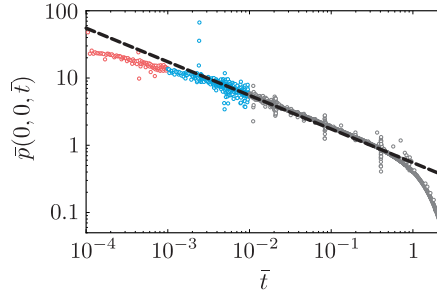


FIGURE 2.19 – Time evolution of the pressure $\bar{p}(0, 0, \bar{t})$ measured at the origin in the numerical simulations with *Gerris* ($\text{Re} = 5000$ and $\text{We} = 250$). Note that each decade is represented with a different colour. The theoretical prediction $\bar{p}(0, 0, \bar{t}) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \bar{t}^{-\frac{1}{2}}$ is superimposed with a black dashed line.

Remarkably, this short-time similarity regime is nicely captured with Wagner theory up to times as large as $\bar{t} = 0.5$. At this point, a sharp departure from similarity is observed and the pressure promptly drops to 0. The physical mechanisms involved in this transition regime are discussed in the next chapter.

2.3.7 Normal force induced by drop impact

Building on the last set of results, we deduce the total net normal force imparted by an impacting drop on the underlying substrate at early times. Integrating the pressure on the wet surface, we have :

$$\tilde{F}(\tilde{t}) = \frac{1}{\sqrt{\tilde{t}}} \iint_S \mathcal{P}(\xi, \eta = 0) dS = 2\pi\sqrt{\tilde{t}} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{3\xi}{\pi\sqrt{3-\xi^2}} d\xi = 6\sqrt{3\tilde{t}}. \quad (2.65)$$

The dimensional counterpart of this net total force induced by the drop on the substrate therefore reads :

$$F(t) = 6\sqrt{3}\rho U^{5/2} R^{3/2} \sqrt{t}, \quad (2.66)$$

where the force is seen to increase as $t^{\frac{1}{2}}$ for short times. Interestingly $F(t)$ could have been inferred directly from energy arguments, with no knowledge of the pressure distribution. Indeed, writing the global kinetic energy conservation for the upper semi-infinite space, we have :

$$\frac{d}{dt}T = - \oint p \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS, \text{ where } T = \left(\iiint \frac{\rho u^2}{2} dV \right). \quad (2.67)$$

In the context of a flat rising disk, the kinetic energy reduces to $T_{\text{disk}} = \frac{4}{3}\rho a^3 U^2$ (Lamb §102). This expression can immediately be transposed to the impacting drop problem so that $T = 4\sqrt{3}\rho U^{7/2} R^{3/2} t^{3/2}$ (see equation (2.52) in §2.3.4). The power of pressure forces then follows as $\frac{d}{dt}T = 6\sqrt{3}\rho U^3 R^2 \left(\frac{Ut}{R}\right)^{1/2}$. Dividing this power by U , we recover exactly the previously obtained result for the net normal total force. This alternate derivation

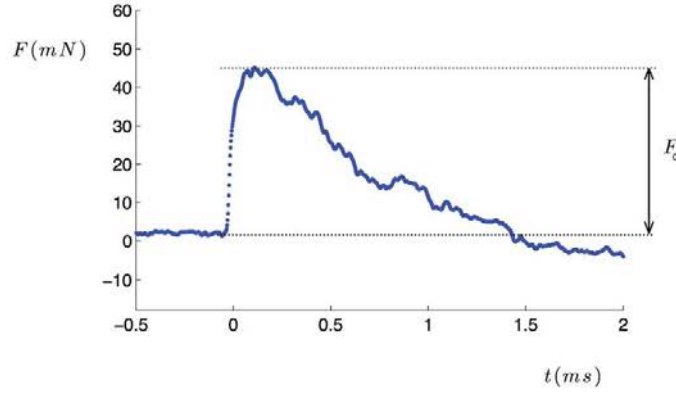


FIGURE 2.20 – Figure 1 of [Soto *et al.* \(2014\)](#) representing the impact force induced by the impact of a water drop of initial radius $R = 1.13$ mm and impacting speed $U = 3 \text{ m.s}^{-1}$ as a function of time, measured by a piezoelectric sensor. The maximum force F_0 is reached after about a tenth of a millisecond and is close to 50 mN.

of the normal force provides with yet an other illustration of the relevance of Lamb's analogy for the drop impact problem.

A good estimation of the normal force is particularly important for the understanding of the process of erosion cause by soil splash ([Furbish *et al.* 2007](#)). Therefore an experimental confirmation of our law is desirable though extremely complex to obtain. The impact force is generally measured with piezoelectric sensors ([Nearing *et al.* 1986](#); [Soto *et al.* 2014](#)). Unfortunately time resolution available with these devices does not allow experimenters to extract any information for early times. However the determination of the impact force for intermediate and late stages as well as its maximum is possible. As shown Fig. 2.20, extracted from [Soto *et al.* \(2014\)](#), impact force reaches its maximum F_0 after a a rising phase of about a tenth of a millisecond and then decreases. As explained in the previous paragraph this decay is due to (i) the regularization of the pressure close to the birth of the ejecta sheet and (ii) the decrease of the pressure at the impact origin after the breakdown of the self-similar solution (see Fig. 2.19). This experiment is performed with a water drop of initial radius $R = 1.13$ mm and impacting velocity $U = 3 \text{ m.s}^{-1}$, corresponding to a Reynolds number of 3900. The maximum force measured by the authors is close to 50 mN. By using the same parameters and considering that the time corresponding to the maximum force is a tenth of a millisecond, equation (2.66) predicts that $F_0 = 76$ mN. This theoretical prediction, though satisfactory, overestimate a little bit the real value. To obtain a more accurate result we need to take account at least of the regularization of the singularity of the pressure.

2.4 Matching with the viscous solution

The inertial limit (large Reynolds number hypothesis) investigated so far has allowed us to model the flow within an impacting drop as the winding motion of an inviscid fluid around an expanding disk, appropriately described by an harmonic potential obeying the unsteady Bernoulli equation (§2.2.2). Actually the agreement between the corresponding theoretical results and numerical Navier-Stokes computations carried out with *Gerris* (encompassing viscous effects) consolidate this approximation, see *e.g.* Figs 2.12 for velocity, 2.18 for pressure or 2.10 for contact line motion comparisons. Most presumably, viscous effects are here dominating only in very thin boundary layers developing along the wet substrate. And indeed, even if the overall agreement between the radial velocity profiles and the inviscid solution is evident, a careful examination of Figure 2.13 reveals the presence of these thin layers in the very vicinity of the solid wall. Even if spatially confined, these boundary layers nonetheless play a key role when comes *e.g.* the question of the erosion potential of an impacting drop. Consequently we now set out to describe the inner structure of these viscous layers and to match it to the previously determined outer inviscid solution. Viscous shear stresses and total erosion potential are eventually briefly discussed.

2.4.1 A simple boundary layer problem ?

Typically, the (inviscid) slip velocity $\tilde{u}_e(\tilde{r}, \tilde{t}) = \frac{2}{\pi} \tilde{r} / \sqrt{3\tilde{t} - \tilde{r}^2}$, here first introduced equation (2.57), and the no-slip condition at the substrate, trademark of real fluids, are reconciled through the introduction of a viscous boundary layer. According to the classic boundary layer theory (*e.g.* Schlichting 1968), the transverse scale of this layer is $\text{Re}^{-1/2}$, so that an appropriate inner coordinate \tilde{Z} can be defined via $\tilde{z} = \text{Re}^{-1/2} \tilde{Z}$. The most simple idea at this point is to think that the outer variables scales defined in §2.2.3 imply that the non-linear terms of the boundary layer equation are negligible when compared to unsteady and viscous terms, so that this equation would simply read :

$$\frac{\partial \tilde{U}_r}{\partial \tilde{t}} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial^2 \tilde{U}_r}{\partial \tilde{Z}^2}, \quad (2.68)$$

where capitalized variables refer to boundary layer quantities. Considering that Euler equation in the inviscid outer domain reduces to $\frac{\partial \tilde{u}_e}{\partial \tilde{t}} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}}$, the boundary layer equation can be recast as the following diffusion equation for the defect velocity :

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}(\tilde{U}_r - \tilde{u}_e) = \frac{\partial^2}{\partial \tilde{Z}^2}(\tilde{U}_r - \tilde{u}_e). \quad (2.69)$$

The corresponding solution can then be expressed as a convolution between the forcing term and the Green function of the heat equation :

$$\tilde{U}_r = \tilde{u}_e(\tilde{r}, \tilde{t}) - \frac{\tilde{Z}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\tilde{t}} \exp\left(-\frac{\tilde{Z}^2}{4(\tilde{t}-\tau)}\right) \frac{\tilde{u}_e(\tilde{r}, \tau)}{(\tilde{t}-\tau)^{\frac{3}{2}}} d\tau. \quad (2.70)$$

Unfortunately this solution leads to a paradoxical cancelling of shear stresses at the wall. We conjecture that this unreasonable result stems from the fact that the sharp longitudinal variations associated with the contact line motion have here been disregarded. Specifically non linear terms do balance unsteady terms, at least near the contact line location $\tilde{r} = \sqrt{3\tilde{t}}$. As a result, the boundary layer actually grows from this moving point both in space and time. While a comprehensive analysis of this problem demands a careful balance of each term likely resulting in a non linear boundary layer problem, beyond the scope of the present study, we nonetheless propose in the following an approximation based on an analogy with boundary layers developing behind shockwaves.

2.4.2 Approximation of the drop impact boundary layer via an analogy with shock-induced boundary layers

We now depict qualitatively the inner viscous structure of the velocity field by using a simple analogy. First remembering the tank-treading movement in the vicinity of the contact line observed and discussed in §2.2.2.2, we point out the violent change in radial velocity when passing through the contact line. In other words, the contact line embodies a neat discontinuity where the slip velocity sees its value suddenly change from 0 to \tilde{u}_e . Building on this observation, we consider in the following the contact line as a kind of shock wave sweeping the substrate, and seeding a boundary layer in its trail (see figure 2.21). This problem is classic in compressible flows and was solved by Mirels (1955) in the context of a shock tube (see Schlichting 1968, for more details). In this study, a fluid initially at rest is swept by a shockwave travelling at celerity U_s in the direction x and instantly acquires an impulse of velocity U_∞ in the process. Behind the normal shockwave is left a growing viscous boundary layer.

The *Ansatz* for Mirel's solution is to introduce $\eta_m = z/\sqrt{t-x/U_s}$ as the self-similar variable. This variable not only takes into account time variations but also longitudinal effects from the shock backwards in x . Disregarding any pressure gradient but considering both unsteady and nonlinear effects, the momentum equation may be rewritten in terms of η_m and of the velocity $U_\infty f'(\eta_m)$:

$$f'''(\eta_m) + \frac{1}{2}\left(\eta_m - \frac{U_\infty}{U_s} f(\eta_m)\right) f''(\eta_m) = 0, \text{ with } f(0) = f'(0) = 0, \text{ and } f'(\infty) = 1. \quad (2.71)$$

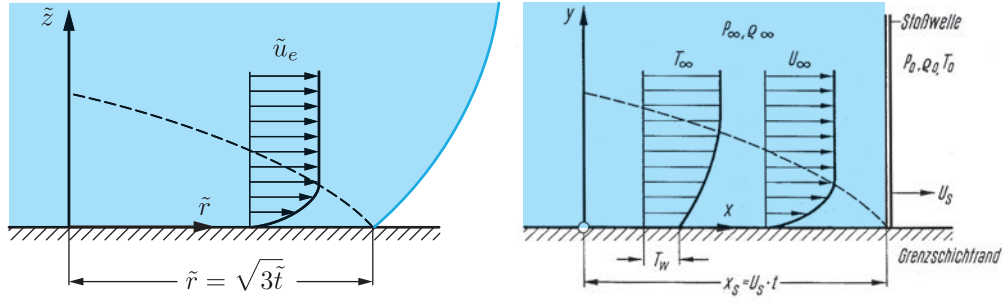


FIGURE 2.21 – Left : Sketch of the contact line during its motion and of the growing boundary layer in its trail, analogous to that developing behind a shockwave. Right : Shockwave-induced boundary layer, reproduced from the german edition of Schlichting textbook (Schlichting 1968). Notations are from Schlichting, with a correspondence between x and \tilde{r} . Note that in the shock-wave case, U_∞ and U_s are both constant.

Note that compressible effects have here been absorbed via an appropriate Lees-Dorodnitsyn's transformation (see Stewartson 1964). Two limiting cases clearly emerge from the picture. For large U_∞/U_s (and after a rescaling and a change of sign due to the choice of origin), the velocity profile tends to a Blasius profile. Conversely, for small values of the velocity ratio, the velocity rather adopts an error function profile. Note that profiles corresponding to intermediate values of this ratio can be found in Schlichting's textbook.

From this sound result we may by analogy transpose this approach to the drop impact problem (see Fig. 2.21). Obviously the outer solution for the drop impact problem is quite more complex for neither U_s nor U_∞ are constant. The core idea consists in drawing a parallel between the shock (at position $U_s t$) and the contact line (at position $\sqrt{3\tilde{t}}$) on the one hand, and between the steady slip velocity U_∞ and $\tilde{u}_e(\tilde{r}, \tilde{t})$ on the other hand. Following this simple analogy the longitudinal velocity is approximated with :

$$\tilde{U}_r(\tilde{r}, \tilde{z}, \tilde{t}) = \frac{2\tilde{r}}{\pi\sqrt{3\tilde{t} - \tilde{r}^2}} f' \left(\frac{\tilde{z}}{2\sqrt{\tilde{t} - \tilde{r}^2/3}} \sqrt{\text{Re}} \right). \quad (2.72)$$

where f' is solution of an equation which is analogous to Eq. (2.71). The so-called composite solution (Van Dyke 1975), which is an expansion valid in the ideal fluid and in the boundary layer, then follows :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_r^{\text{comp}} = & -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sqrt{3}k \cos(\sqrt{3}k) - \sin(\sqrt{3}k)}{k} e^{-k \frac{\tilde{z}}{\sqrt{\tilde{t}}}} J_1\left(\frac{k\tilde{r}}{\sqrt{\tilde{t}}}\right) dk \\ & + \frac{2\tilde{r}}{\pi\sqrt{3\tilde{t} - \tilde{r}^2}} \left(f' \left(\frac{\tilde{z}}{2\sqrt{\tilde{t} - \tilde{r}^2/3}} \sqrt{\text{Re}} \right) - 1 \right). \end{aligned} \quad (2.73)$$

In practice we approximated f' with erf function. Figure 2.22 proposes a comparison

between the numerical velocity profiles extracted from *Gerris* computations and this approximation, which proves to provide a fairly good description for the flow. As a side note, we remark that replacing the error function with Blasius profile yields a slightly more marked deviation between theory and numerical results. That said we chose not to tune the velocity ratio appearing in equation (2.71) as (i) this is too speculative and (ii) such adjustment is certainly beyond the limits of our analogy.

It is interesting to note that for ξ smaller than $\sqrt{3}$, Mirel's self-similar variable η_m tends to $\text{Re}^{1/2}\eta = \tilde{Z}/\sqrt{\tilde{t}}$, so that the vertical structure for solution (2.72) now simply involves $\text{erf}\left(\frac{1}{2}\text{Re}^{1/2}\eta\right)$. Actually, this solution is merely the purely diffusive solution of equation (2.69) for constant forcing (\tilde{u}_e constant in time).

From the previous results we may extract several quantities, such as the displacement thickness or the locus of iso-velocities. The displacement thickness δ_1 can readily be estimated with $f' = \text{erf}$ as :

$$\delta_1 = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{\tilde{U}_r}{\tilde{u}_e}\right) d\tilde{Z} = \frac{2}{\sqrt{\pi}\sqrt{\text{Re}}} \sqrt{\tilde{t} - \tilde{r}^2/3}. \quad (2.74)$$

Similarly, isolines for the velocity can be extracted both for *Gerris* computations and for boundary layer theory. Figure 2.23 provides with a qualitative comparison between theory and numerical results, and it can be remarked that the overall prediction is more than just qualitative.

Though the velocity ratio $(2r/\pi/\sqrt{3\tilde{t} - \tilde{r}^2})/(\sqrt{3\tilde{t}}/2/\tilde{t})$ (counterpart of U_∞/U_s in equation (2.71)) is infinite near the shock, we note that the agreement between numerical and theoretical solutions is actually surprisingly good. We conjecture that whenever this ratio decreases to a value lower than one, *i.e.* near the centre and for large times where this ratio behaves as $(4\tilde{r})/(3\pi)$ so tends to 0, the error function approximation emerges as the solution of equation (2.71). Eventually we remark that an in-depth analysis of these phenomena demands a more involved description for the boundary layer (such as the Interactive Boundary Layer theory, see *e.g.* Lagrée 2010) or the multistucture of Elliott et Smith (2015) and/or a deeper analysis of the Wagner region (Oliver 2002; Korobkin 2007; Oliver 2007).

2.4.3 Estimation of the shear stress and the total drag

With this boundary layer solution, we are now in a position to provide with an estimation of the wall shear stress $\tilde{\tau} = \frac{1}{\text{Re}} \partial \tilde{U}_r / \partial \tilde{Z} \Big|_{\tilde{Z}=0}$, *i.e.* the viscous component of the stress which has been disregarded so far. And indeed this quantity is of paramount importance

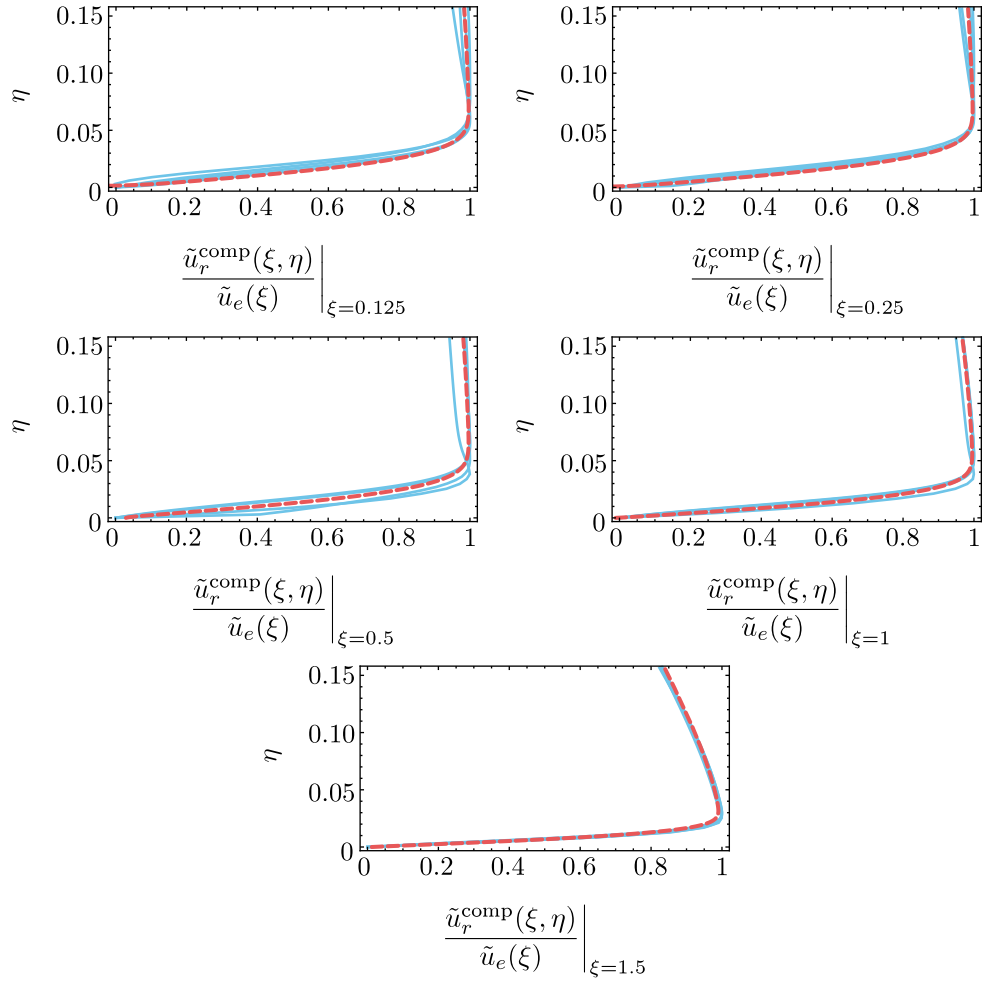


FIGURE 2.22 – Inner-boundary layer radial velocity profiles at different locations ξ : 0.125, 0.25, 0.5, 1 and 1.5. Blue solid lines correspond to numerical solutions obtained with *Gerris* at $\bar{t} = 5 \times 10^{-3}, 10^{-2}, 5 \times 10^{-2}$ and 10^{-1} for $\text{Re} = 5000$ and $\text{We} = 250$ and represented in the self-similar space. Note that velocities are rescaled by their maximum value. The red dashed lines stand for the theoretical composite solution (equation (2.73)) blending the self-similar viscous boundary layer solution with the self-similar Wagner inviscid solution for impact. The composite solution is also rescaled by the edge velocity $\tilde{u}_e(\xi)$ given by equation (2.57).



FIGURE 2.23 – Left : Isolines for the radial velocity \tilde{u}_r extracted from the numerical simulations. Right : Theoretical isolines for the radial velocity given by the composite expansion $\tilde{u}_r^{\text{comp}}$. Note that the transverse scale has here been stretched to visualize the boundary layer.

as far as raindrop-induced erosion of erodible beds is concerned (Ellison 1945; Rein 1993; Lagrée 2003; Legu  dois *et al.* 2005; Furbish *et al.* 2007).

Upon using equation (2.72) (with the same erf approximation for function f' as before), we readily obtain :

$$\tilde{\tau}(\tilde{r}, \tilde{t}) = \frac{2\sqrt{3}\tilde{r}}{\pi^{\frac{3}{2}}\text{Re}^{1/2}(3\tilde{t} - \tilde{r}^2)}. \quad (2.75)$$

This theoretical prediction is confronted Fig. 2.24 with numerical profiles for the shear stress extracted from *Gerris* computations, and is shown to nicely agree with observations. From this local distribution for the stress we may infer the total drag induced with a drop impact, by integration over the wet area :

$$\tilde{D}(\tilde{t}) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3\tilde{t}}} \tilde{\tau}(\tilde{t}) \tilde{r} \, d\tilde{r} \, d\theta. \quad (2.76)$$

Unfortunately this integral diverges due of the $1/x$ singularity developing in the near contact line region, and visible from Fig. 2.24 left. Such singularities are usually a signature of an additional physics in the diverging region, not taken into account in the model. And indeed, Fig. 2.24 right reveals that the calculated shear stress significantly deviates from the theoretical prediction at some small distance Δ from the contact line position to reach a maximum value. Now integrating the local shear stress up to $\tilde{r} = \sqrt{3\tilde{t}} - \Delta$, where Δ is this small cut-off length, we can provide an estimation for the drag at leading order in $\log(\Delta)$:

$$\tilde{D}(\tilde{t}) = 3\sqrt{\frac{\tilde{t}}{\pi\text{Re}}} \left(-2 \log \left(\frac{\Delta}{\sqrt{\tilde{t}}} \right) - 4 + \log(12) \right). \quad (2.77)$$

Upon noting that this quantity can be dimensionalised with $\rho U^2 R^2$, the expression for the total drag in dimensioned variables follows :

$$D(t) = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \mu^{\frac{1}{2}} \rho^{\frac{1}{2}} U^2 R \sqrt{t} \left(-2 \log \left(\frac{\Delta}{\sqrt{\frac{U t}{R}}} \right) - 4 + \log(12) \right). \quad (2.78)$$

Noticeably, the departure from the theoretical prediction pinpointed out in Fig. 2.24 right seems to occur at a precise location in self-similar variables, therefore suggesting a \sqrt{t} time dependence for Δ . From the numerical computations the value of Δ/\sqrt{t} can be estimated to be around 0.03. Note that this is obviously a crude estimation, which nonetheless allows to propose the following estimate for the impact-induced drag :

$$D(t) \simeq 10.7 \mu^{\frac{1}{2}} \rho^{\frac{1}{2}} U^2 R \sqrt{t}. \quad (2.79)$$

To further refine this prediction, the true nature of the cut-off length Δ needs to be

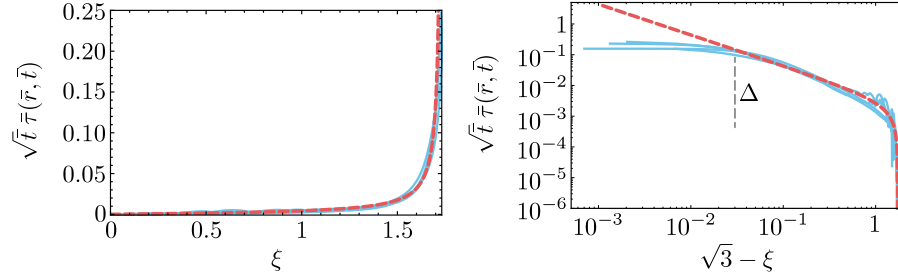


FIGURE 2.24 – Left : Numerical and theoretical shear stress distribution underneath the drop, represented in the self-similar space (the numerical data are taken at times $\bar{t} = 5 \times 10^{-3}$, 10^{-2} , 5×10^{-2} and 10^{-1}). Right : Same data represented as a function of the distance from the contact line (log plot). This representation reveals a cut-off distance Δ from which the $1/x$ singularity is screened. Importantly the numerical mesh size has been chosen to be small enough ($\Delta x = 5 \times 10^{-4}$) to ensure the resolution of the fine-scale motion in the vicinity of the contact line.

clearly identified. Several candidates for governing this quantity naturally emerge, with for example the viscous $1/\text{Re}$ regularisation length in the vicinity of the contact line region or the inertial matching with the Wagner inner layer of typical size $(d(t)/R)^2$. This requires further investigation.

2.5 Discussion about some physical parameters

In the first chapter of this thesis we discussed the influence of physical parameters involved in drop impact as viscosity, capillary phenomena and ambient air. In this section we discuss the influence of the last two parameters. The influence of the viscosity is discussed in Appendix B.

2.5.1 Influence of capillary phenomena

2.5.1.1 Influence of Weber number

In this thesis we are interested by inertia-dominated impact. In particular we only consider the high Weber number regime. Therefore as explained in the previous chapter we do not expect capillary phenomena to have a significant influence on a global scale, but locally surface tension can still play a dominant role. For example, the high-curvature turnaround region at the lamella root is typically a place where capillarity presumably plays an important role. But due to scale separation, this region is invisible at our level of description. Indeed, in classic impact analyses see *e.g.* [Oliver \(2002\)](#), the typical extent of this intermediate Wagner region associated with highly curved interfaces is found to be $O(\varepsilon^2)$, to be compared both with the $O(\varepsilon)$ size of the main impact region considered throughout this paper (see §2.2.3) and with the $O(\varepsilon^3)$ thickness of the lamella. In the

framework of our first-order theory, we therefore do not anticipate appreciable deviations stemming from this zone. Conversely, for a correct description of the ejected liquid sheet feeding conditions and of the pressure fall-off near the lamella root reported Fig. 2.17, an accurate representation of this matching region appears mandatory.

2.5.1.2 Influence of dynamic contact angle

As mentioned in chapter 1, by performing experiments and numerical simulations Šikalo *et al.* (2005) demonstrated that the early evolution of the dynamic contact angle was quite insensitive to the experimental conditions and fairly well captured by the dynamic contact angle of a truncated sphere (Rioboo *et al.* 2002). This is the reason why in our simulations, dynamic effects have been disregarded in the description of the contact angle, which has been set to the constant value $\pi/2$. The agreement between our simulations and the purely inertial theory is an indication of the unimportance of dynamic wetting. It might further be interesting to note that the surface energy gained by wetting the solid is of the order of $1/We$ when rescaled by the initial kinetic energy. Again this heuristically rules out any leading effect from wetting in the short-term dynamics. This ratio evolves with time though, and ultimately wetting phenomena become dominant, as evidenced by the late $t^{1/10}$ spreading behaviour consistent with Tanner's law in the experiments of Rioboo *et al.* (2002) performed with purely wetting liquids.

2.5.2 Influence of ambient air

We discussed in the first chapter of the thesis several aspects of the influence of surrounding air. In particular we presented the mechanism of the dimple formation which is a preimpact effect (Thoroddsen *et al.* 2005; Josserand et Thoroddsen 2016).

Smith *et al.* (2003) first depicted theoretically this process by coupling lubrication in the squeezed air film and potential flow inside the drop. These authors notably evidenced the presence of off-axis pressure peaks. While more recent studies raised doubt about the link between this dimple formation and splash triggering per se – that might merely be a secondary independent consequence of the presence of surrounding gas (Duchemin et Josserand 2011), this gas pocket is nonetheless formed over timescales and lengthscales overlapping that of the phenomenon reported in the present paper (Mani *et al.* 2010). It is therefore legitimate to question about the impact of this air entrapment phenomenon on our results.

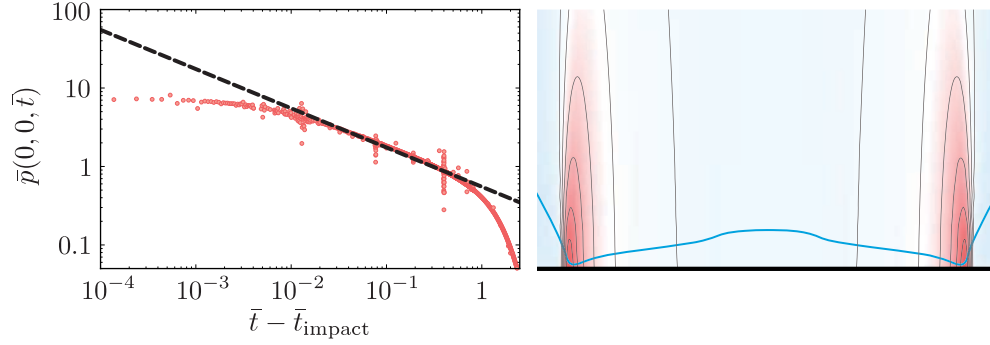


FIGURE 2.25 – Left : Time evolution of the pressure as measured under an impacting drop with air-induced dimple formation (*i.e.* bubble entrapment) taken into account. The red trace monitors the pressure at the origin. The physical parameters of this *Gerris* simulation are $Re = 5000$ and $We = 250$. The superimposed black dashed line corresponds to the theoretical solution $\bar{p}(0,0,\bar{t}) = \frac{\sqrt{3}}{\pi}(\bar{t} - \bar{t}_{\text{impact}})^{-\frac{1}{2}}$ delayed from \bar{t}_{impact} , where \bar{t}_{impact} is the real impact time (in the numerical simulations, \bar{t}_{impact} corresponds to the time at which liquid and solid are just one grid cell away). Right : Close-up of the bottommost point of the drop in the numerical simulation (at $\bar{t} = 1.54 \times 10^{-1}$). The position of the interface is materialised with a blue line. The colormap illustrates the distribution of the pressure field within the drop and in the gas layer. Noteworthy enough the isopressure lines seamlessly cross the interface, revealing the transparency of the dimple to pressure. Note that for the sake of clarity, the vertical scale has here been magnified by a factor 22.

2.5.2.1 Simulation with air entrapment

In order to investigate these effects, we performed a simulation of a liquid drop approaching a solid substrate, deforming as a result of lubrication pressure rise in the film, and finally impacting the substrate. Figure 2.25 represents the time evolution of the pressure exerted on the support at the axis. Considering that air delays the moment of impact (Mani *et al.* 2010), we introduce a time shift t_{impact} corresponding to the moment where the drop and the solid are only a grid cell apart. Interestingly our results reveal that the pressure at the origin (measuring now the entrapped bubble pressure) is fairly well captured by relation (2.64) after replacing \tilde{t} with the true time from impact $\tilde{t} - \tilde{t}_{\text{impact}}$, that is :

$$\tilde{p}(0,0,\tilde{t}) = \frac{\sqrt{3}}{\pi}(\tilde{t} - \tilde{t}_{\text{impact}})^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.80)$$

This agreement between our prediction and a simulation incorporating air entrapment effects not only validates and extends our results beyond the initial scope of Wagner impact theory (disregarding air effects), but also suggests that the results of the present manuscript correspond to the far-field behaviour of an impacting drop in presence of surrounding gas. This observation outlines the appealing prospect of describing both the dimple geometry and associated dynamical fields by analytical means.

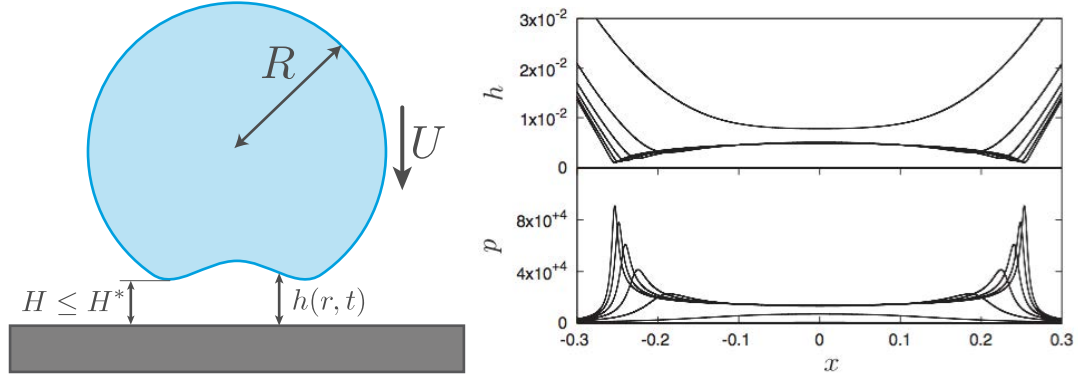


FIGURE 2.26 – Left : Sketch of the fall of a drop of radius R and impact velocity U before impact when the thickness of air layer beneath the drop is $H \leq H^* = R \text{St}^{\frac{2}{3}}$. Because of the lubrication pressure the bottommost part of the drop is deformed into a dimple. Here $h(r, t)$ represents the position of the free surface. Right : Figure 1 extracted from [Mandre et al. \(2009\)](#) representing the early stages in the evolution of a drop impacting a solid surface (for a non-axisymmetric model). The top is a representation of the position of the free surface $h(x, t)$ as the drop approaches contact. The bottom is a representation of the pressure in the lubrication layer. Note the pressure maximum causes a dimple in the interface, and later splits into two maxima.

2.5.2.2 One last step : toward a unified theory encompassing ambient air

The theory presented in this chapter is a postimpact theory where bubble entrapment was neglected to be consistent with Wagner theory and the framework developed by the water entry community. However the numerical simulations we performed taking account this preimpact effect shown that isopressure lines seamlessly cross the interface, revealing the transparency of the dimple to pressure (see Fig. 2.25 right). This result suggests that for a inertia-dominated impact there is no discontinuity of the pressure field across the free surface of the drop and can be interpreted as a verification of a stress-continuity condition. This result is consistent with previous studies focused on the dimple formation which pointed out that the pressure in the lubrication layer is analogous to the pressure we found in the drop ([Smith et al. 2003](#); [Mandre et al. 2009](#); [Mani et al. 2010](#); [Hicks et Purvis 2010](#)). Indeed when the drop is at a distance H of the substrate lower than the characteristic thickness $H^* = R \text{St}^{\frac{2}{3}}$ (see chapter 1), the deformation at the bottom of the drop starts and a dimple is formed as shown at the top of Fig. 2.26 right, extracted from [Mandre et al. \(2009\)](#). The pressure in the lubrication layer associated to this deformation is shown at the bottom of Fig. 2.26 right. We notice that the pressure maximum at the center causes a dimple in the interface, and later splits into two maxima. Then we can conjecture that as soon as $H \leq H^*$, the pressure inside the lubrication layer will become maximum at the extremity of the dimple and induce the same pressure field inside the drop by continuity of the stress across the free surface. Therefore the important time in this problem is maybe not t_{impact} but the moment t_{H^*} where $H = H^*$. Hence an interesting perspective could be to obtain a

unified theory encompassing air effect by couple our theory with lubrication behavior in the air. We can imagine that the dimple geometry and characteristics could be derived analytically, with a far-field corresponding to the here presented flow. In the same time it is probably possible to obtain the good initial condition for the short time self-similar behavior. With such matching our theory will be more realistic by taking account of the preimpact effect of air.

A first idea is to consider as [Duchemin et Josserand \(2011\)](#) the following system of equations in axisymmetric coordinates :

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{z}^2} = 0 \quad \text{in the liquid,} \quad (2.81)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{t}} + \frac{1}{2} |\bar{\nabla} \bar{\phi}|^2 + \bar{p}_g + \frac{\bar{\kappa}}{\text{We}} = C(\bar{t}) \quad \text{on the free surface,} \quad (2.82)$$

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{12 \bar{r} \text{St}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}_g}{\partial \bar{r}} \right) \quad \text{on the free surface,,} \quad (2.83)$$

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{r}} \quad \text{on the free surface.} \quad (2.84)$$

As in our theory, the unknown velocity potential is solution of a Laplace equation. However in this case we have to consider the Bernoulli's conservation equation on the free surface. For this equation [Duchemin et Josserand](#) take account of surface tension to avoid the finite time singularity for the curvature κ . Those two first equations are coupled with a lubrication approximation (2.83) involving the position of the free surface $h(r, t)$ (see Fig. 2.26), the pressure in the air layer p_g and the Stokes number. A kinematic condition at the free surface is necessary to obtain the interface advection equation (2.84). An appropriate far-field condition taking account the flow inside the drop is necessary to complete the previous system and to propose a solution for this problem. This theoretical extension could be reinforced by numerical simulations using *Gerris* in particular to study the influence of the Stokes number.

2.6 Main results and conclusion

2.6.1 Main results

In this chapter, the short-term dynamics of a drop impacting a rigid substrate has been elucidated. A self-similar solution for the impact-induced flow has in particular been unraveled and matched to a self-similar viscous boundary layer. This solution has been intensively validated with numerical *Gerris* computations, and this constant cross-testing between asymptotic theory and multiphase adaptive flow simulations is one of the key

feature of the present approach. In the course of this investigation, several important results have been substantiated. These results allow both for a simple yet accurate qualitative depiction of drop impact along with an in-depth quantitative understanding of this phenomenon. These key results are summarised in the following :

- A fundamental analogy between the water entry of a solid object (Wagner's original problem) and drop impact exists,
- During the earliest moments post-impact, the contact line follows a tank-treading motion. There is in particular no contact line sweeping motion,
- The impact-induced flow is concentrated in the contact zone, and the far-field merely corresponds to an undisturbed rigid-body motion reducing to a global free-flight at velocity U . There is no global or large-scale drop deformation during impact,
- The position of the contact line is given by the simple relation $d(t) = \sqrt{3RUt}$. Though simple, this locus does not correspond to the cut radius of a truncated sphere,
- The wet footprint extent of the drop dictates the size of the impact-induced perturbed flow,
- There is a consistent analogy between the impact-induced flow within the drop and the flow induced by a flat rising expanding disk (Lamb's analogy),
- The impact pressure is to be associated with the unsteady Bernoulli contribution $-\partial_t\phi$. It cannot be inferred from usual inertial steady contribution $-\rho U^2$,
- As a corollary to the previous point, the impact pressure is extremal at the contact line. It is not maximal at the stagnation point,
- A full three-dimensional self-similar solution for the impact-induced flow of an inviscid drop exists and matches quantitatively realistic numerical data on drop impact,
- Analytical solutions for this flow have been presented in integral forms (with some explicit closed-form expressions along some particular locations), see table 2.2 (in dimensional form),
- An original inviscid stagnation point structure with an unexpected r/\sqrt{t} slip velocity develops in the vicinity of the origin. The velocity field structure markedly differs from the classic r/t prediction occurring for later times,
- An approximate self-similar solution for the viscous boundary layer seamlessly match with the inviscid impact-flow (analogy with Mirels shockwave problem),
- Self-similar variables have the same structure z/\sqrt{t} both in the outer region and in the boundary layer,
- From the knowledge of the distribution of the dynamical fields across the wet area, the expressions for the normal and tangential total force on the substrate are provided,

$(r = 0, \quad z = O(d(t)) > 0^+)$	$(0 \leq r < d(t) = \sqrt{3RUt}, \quad z = 0^+)$
$p(0, z, t) = \frac{3\sqrt{3}\rho U^{\frac{5}{2}} R^{\frac{3}{2}}}{\pi} \frac{\sqrt{t}}{3URt+z^2}$	$p(r, 0^+, t) = \frac{3\rho U^2 R}{\pi\sqrt{3URt-r^2}}$
$u_r(0, z, t) = 0$	$u_r(r, 0^+, t) = \frac{2Ur}{\pi\sqrt{3URt-r^2}}$
$u_z(0, z, t) = \frac{2U}{\pi} \arctan\left(\frac{\sqrt{3URt}}{z}\right) - \frac{\sqrt{3U^3 R t} z}{3URt+z^2} - U$	$u_z(r, z, t) = 0$
$(d(t) \gg r, \quad d(t) \gg z > 0^+)$	$(0 \leq r < d(t) = \sqrt{3RUt}, \quad z = O(\text{Re}^{-1/2}d(t)))$
$u_r(r, z, t) = \frac{2}{\pi\sqrt{3}} U^{\frac{1}{2}} R^{-\frac{1}{2}} \frac{r}{\sqrt{t}}$	$U_r(r, z, t) = \frac{2Ur}{\pi\sqrt{3URt-r^2}} \text{erf}\left(\sqrt{\frac{\rho UR}{\mu(U Rt - \frac{r^2}{3})}} \frac{z}{2}\right)$
$u_z(r, z, t) = -\frac{4}{\pi\sqrt{3}} U^{\frac{1}{2}} R^{-\frac{1}{2}} \frac{z}{\sqrt{t}}$	$\tau(r, t) = \frac{2\sqrt{3}\rho^{\frac{1}{2}} U^{\frac{3}{2}} R^{\frac{1}{2}} \mu^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{r}{3URt-r^2}$
$p(0, 0, t) = \frac{\rho U^{\frac{3}{2}} R^{\frac{1}{2}}}{\pi} \sqrt{\frac{3}{t}}$	$F(t) = 6\sqrt{3}\rho U^{\frac{5}{2}} R^{\frac{3}{2}} \sqrt{t} \quad D(t) \simeq 10.7\mu^{\frac{1}{2}} \rho^{\frac{1}{2}} U^2 R \sqrt{t}$

TABLE 2.2 – Summary of the main results of the paper in dimensioned form. The top part of the table refers to ideal fluid results (left : closed-form results along the axis of symmetry, right : along the substrate). The left middle part sums up inviscid stagnation point results, and the right middle part summarises the viscous boundary layer results. Observables such as the net normal force $F(t)$ and tangential force $D(t)$ are reminded as well in the bottom part of the table.

- The asymptotic solution is found to be numerically valid over several decades in time up to $t = 0.5R/U$. This solution was found to be insensitive to air-induced dimple formation,
- For times of order one, the present results remain at least qualitative.

2.6.2 To conclude

Within the numerous limits carefully drawn along this chapter, a consistent asymptotic description of the dynamics and geometry of drop impacting a solid surface has been proposed. The results may simply be summarised through three analogies : Wagner water entry (drop impact being the dual of this problem), Lamb's disk winding flow (that accurately represents the flow induced with the impact) and Mirels shockwave-induced boundary layer (remarkably capturing the boundary layer developing in the contact line's trail). The original strategy developed throughout this chapter has been to validate those three analogies through a constant confrontation between numerical simulations and asymptotic analysis. Our study revealed that very powerful state-of-the-art adaptive codes now allow to probe all the dynamic features of realistic violent events such as drop impact, but in the meantime, it also emphasised again how powerful and useful asymptotic analysis is in providing an in-depth understanding of such phenomena and in uncloaking the raw data delivered by the code. Finally our study brought to light some interesting features and observables (such as the particular stagnation point structure, pressure distribution, contact line motion, viscous total drag force) never

observed to date neither in simulations nor in experiments. This certainly arouses the exciting prospect of their unveiling in future experimental studies.

Chapitre 3

Dynamique aux temps intermédiaires : perte de similarité

3.1 Introduction

Nous avons proposé dans le chapitre précédent un modèle aux temps courts pour l'impact d'une goutte sur une surface solide basé sur une analogie avec le problème du *water entry* et la théorie de Wagner ([Philippi et al. 2015](#)). Nous avons en particulier obtenu des solutions semblables axisymétriques pour les champs de vitesse et de pression dans

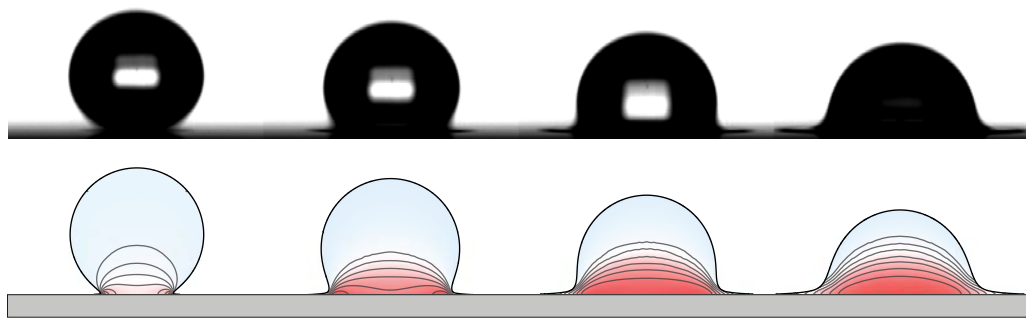


FIGURE 3.1 – Haut : Impact d'une goutte d'eau sur une lame de verre pour un nombre de Reynolds de 12500 filmée à l'aide d'une caméra rapide Photron Fastcam SA5. L'intervalle de temps entre chaque image est de $1/15000$ s. Bas : Représentation du champ de pression lors de l'impact d'une goutte simulé avec *Gerris* pour un nombre de Reynolds de 5000. L'intervalle de temps adimensionné par le temps convectif R/U est $\Delta\bar{t} = 0, 2$. L'allure générale de la goutte au cours de l'impact est correctement reproduite par la simulation bien que les nombres de Reynolds soient différents. On constate qu'au bout d'un certain temps la structure du champ de pression a changé. Le maximum n'est plus près de la ligne de contact mais au centre.

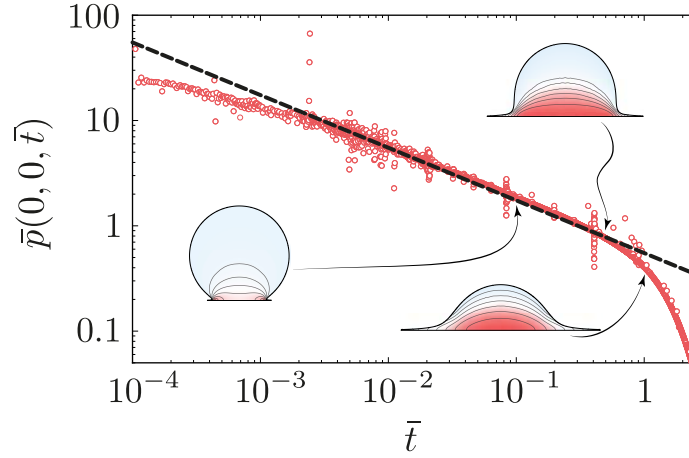


FIGURE 3.2 – Evolution temporelle de la pression $\bar{p}(0, 0, \bar{t})$ à l'origine de l'impact issue de la figure (2.19). La solution numérique obtenue avec *Gerris* (points rouge) pour $(\text{Re}, \text{We}) = (5000, 250)$ est en bon accord avec la solution théorique (ligne discontinue noire) donnée par $\bar{p}(0, 0, \bar{t}) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \bar{t}^{-\frac{1}{2}}$. Au bout d'un temps $\bar{t} \sim 1$ la pression décroît fortement et quitte le régime autosimilaire. On remarque que cette forte décroissance est associée à un changement de la structure du champ de pression. Les représentations du champ proviennent de la figure 3.1.

la goutte dépendant des variables $\xi = \frac{r}{\sqrt{t}}$ et $\eta = \frac{z}{\sqrt{t}}$ en bon accord avec des solutions numériques obtenues avec *Gerris*. Nous avons également mis en évidence la structure particulière du champ de pression aux temps courts avec un maximum près de la ligne de contact plutôt qu'au centre de la goutte. Cependant comme le montre la figure 3.1, cette structure évolue et au bout d'un temps suffisamment long on observe une transition. Dans cette nouvelle configuration le maximum du champ de pression est au centre de l'impact. Comme le montre la figure 3.2 cette transition est en réalité associée à la forte décroissance de la pression que l'on observe au bout d'un temps $\bar{t} \sim 1$ que nous avons déjà évoqué au paragraphe 2.3.6 en commentaire de la figure (2.19). Cette chute brutale avait par ailleurs déjà été remarqué par [Josserand et Zaleski \(2003\)](#) et [Eggers et al. \(2010\)](#). Dans ce chapitre nous allons nous intéresser au mécanisme responsable de la perte de similarité de la solution.

3.2 Modèle pour les temps intermédiaires

3.2.1 Cadre théorique et hypothèses

Nous proposons dans ce chapitre un prolongement du modèle présenté au chapitre précédent de façon à capturer le mécanisme responsable de la perte de similarité et donc de la chute brutale de la pression. Nous considérons de nouveau l'impact d'une goutte de rayon initial R sur une surface solide à la vitesse U . Les hypothèses concernant l'écoulement ou la nature du substrat sur lequel la goutte s'écrase demeurent les mêmes qu'au

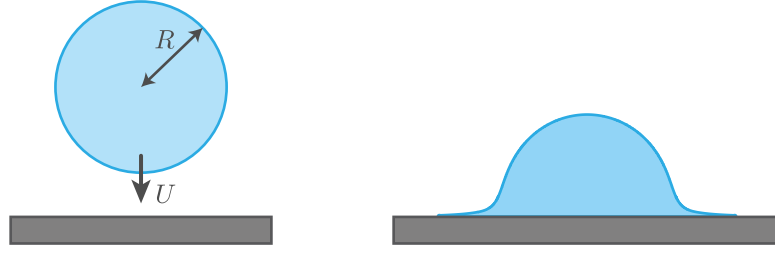


FIGURE 3.3 – Représentation schématique de l'impact d'une goutte avant (gauche) et après contact aux temps intermédiaires *i.e* lorsque $\bar{t} \sim 1$ (droite). Dans cette dernière configuration on a $d(\bar{t})/R = O(1)$.

chapitre 2. En particulier nous nous situons toujours dans le cadre de la théorie des écoulements potentiels. Bien que nous étudions ici l'impact aux temps intermédiaires ($\bar{t} \sim 1$), nous ne nous intéresserons pas à la formation de la nappe liquide ou aux évènements qui peuvent en découler.

3.2.2 Candidats susceptibles d'être responsable de la perte de similarité

Lorsque $\bar{t} \sim 1$ la configuration géométrique de la goutte a évolué et il n'est plus possible de l'assimiler à une sphère tronquée comme lors de la phase cinématique (Rioboo *et al.* 2002). En effet la goutte a commencé à s'étaler de façon que $d(\bar{t})/R = O(1)$ et une nappe liquide s'est formée (Fig. 3.3). Nous conjecturons donc que la fin du régime autosimilaire est causé par l'un au moins des effets suivants :

1. effet de confinement par le haut de la goutte,
2. décélération du sommet de la goutte,
3. effets géométriques avec la perte de l'approximation $d(\bar{t}) = \sqrt{3\bar{t}}$.

En effet nous avons montré au chapitre précédent que le champ de pression est dans un premier temps localisé près de la zone de contact et que le reste de la goutte a à l'inverse une pression très faible ce qui explique la remarque d'Engel (1955) concernant la chute libre du sommet lors des instants primordiaux de l'impact. Le *bulbe* de pression, dont l'extrémité est au niveau de la ligne de contact puis de la zone de naissance du jet, croît ensuite au cours de l'impact alors que dans le même temps le sommet de la goutte se dirige vers le substrat. Lorsque le champ de pression rencontre le sommet de la goutte, celui-ci va subir une décélération et des effets de confinement, dont on sait qu'il peuvent avoir une influence sur les solutions de l'équation de Laplace (Cooke *et Peregrine* 1995). Nous avons également montré que la connaissance de la position de la ligne de contact était un paramètre fondamental pour la bonne compréhension du problème. Cette quantité intervient par ailleurs de manière explicite dans la solution analytique des champs de pression et de vitesse. On imagine alors qu'une modification

de la loi du mouvement de la ligne de contact aurait des répercussions sur les autres quantités d'intérêts du problème.

3.2.3 Modélisation du problème tenant compte des effets de confinement

Pour pouvoir trouver lequel de nos trois candidats est responsable de la perte de similarité, nous proposons un modèle très simple, prolongeant le modèle du chapitre précédent, qui permet de tenir compte de tous les paramètres importants du problème.

3.2.3.1 Enoncé des équations régissant le problème

Afin d'étudier la perte de similarité en tenant compte du nouveau paramètre mis en jeu dans le problème à savoir la position du sommet de la goutte que nous noterons $h_g(\tilde{t})$, nous partons du problème à l'ordre dominant non translaté présenté dans le chapitre 2. Nous supposons ici que ces équations en coordonnées axisymétrique restent toutes valables pour les temps intermédiaires c'est à dire dans la limite $\varepsilon = \frac{d(\tilde{t})}{R} \sim 1$. Cependant il n'est plus nécessaire de disposer d'une équation cinématique et de la condition de Wagner puisque dorénavant la loi du mouvement de la ligne de contact est une donnée du problème. De plus, de façon à tenir compte de la position du sommet de la goutte et de sa décélération, la condition au loin est remplacée par la condition de Neumann suivante :

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{z}} = \dot{h}_g(\tilde{t}) \quad \text{en } \tilde{z} = h_g(\tilde{t}). \quad (3.1)$$

Cette dernière condition exprime simplement le fait que la vitesse du sommet de la goutte est donnée par la dérivée temporelle de sa position $h_g(\tilde{t})$ et nous conduit à effectuer une translation du potentiel par l'intermédiaire de la relation $\tilde{\phi} = \dot{h}_g(\tilde{t})\tilde{z} + \check{\phi}$ afin de rendre plus aisée la résolution des équations qui régissent ce phénomène. Le problème est alors donné par les relations suivantes et est résumé par la figure 3.4 :

$$\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial \check{\phi}}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{\partial^2 \check{\phi}}{\partial \tilde{z}^2} = 0 \quad \text{dans le liquide,} \quad (3.2)$$

$$-\frac{\partial \check{\phi}}{\partial \tilde{t}} = \tilde{p} \quad \text{dans le liquide,} \quad (3.3)$$

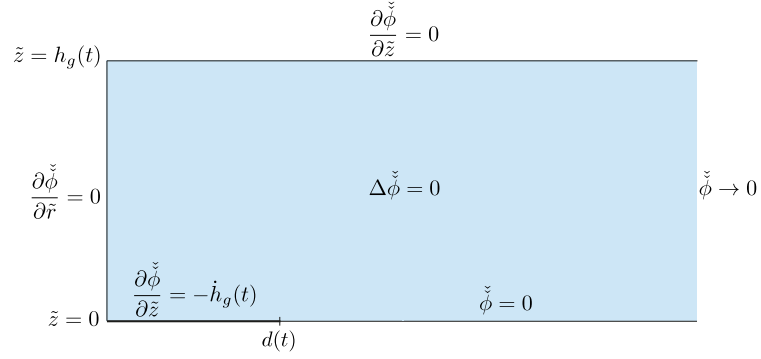


FIGURE 3.4 – Schéma représentant le modèle aux temps intermédiaires tenant compte des effets de confinement via l'introduction la position du sommet de la goutte $h_g(\tilde{t})$ à la place de la condition au loin utilisée dans le chapitre 2. Les effets de décélération du haut de la goutte sont pris en compte par l'intermédiaire d'une condition de Neumann liant la vitesse de cette région à la dérivée temporelle de $h_g(\tilde{t})$. Par ailleurs le rayon $d(\tilde{t})$ de la plaque plane équivalente de la théorie de Wagner correspondant à la zone de naissance de la nappe liquide est ici une donnée du problème. Nous complétons les équations du problème par une condition au loin à droite du domaine.

auxquelles il faut associer les conditions aux limites mixtes en $\tilde{z} = 0$:

$$\check{\phi} = 0 \quad \text{pour} \quad \tilde{r} > \tilde{d}(\tilde{t}), \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \check{\phi}}{\partial \tilde{z}} = -\dot{h}_g(t) \quad \text{pour} \quad \tilde{r} < \tilde{d}(\tilde{t}). \quad (3.5)$$

Par commodité nous rajoutons une condition de symétrie sur l'axe pour pouvoir ne considérer que la moitié du domaine :

$$\frac{\partial \check{\phi}}{\partial \tilde{r}} = 0 \quad \text{pour} \quad \tilde{r} = 0. \quad (3.6)$$

La condition de Neumann située au niveau du sommet de la goutte devient :

$$\frac{\partial \check{\phi}}{\partial \tilde{z}} = 0 \quad \text{en} \quad \tilde{z} = h_g(\tilde{t}). \quad (3.7)$$

Enfin, pour se placer dans la continuité de la théorie de Wagner nous ajoutons une conditions au loin à droite :

$$\check{\phi} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad \tilde{r} \rightarrow \infty. \quad (3.8)$$

Dans la suite l'idée est d'adapter les conditions aux limites de ce modèle à chacune des possibilités évoquées précédemment et à tester la validité des solutions associés afin de trouver la cause de la perte de similitude aux temps intermédiaires.

3.2.3.2 Solution analytique

Compte tenu de la nouvelle condition aux limites de Neumann représentant le sommet de la goutte, nous obtenons par la méthode de séparation des variables la solution de l'équation de Laplace suivante pour le potentiel des vitesses :

$$\check{\phi}(\tilde{r}, \tilde{z}) = \int_0^\infty \mathcal{C}(k, t) \frac{\text{ch}(k(h_g(\tilde{t}) - \tilde{z}))}{\text{ch}(kh_g(\tilde{t}))} J_0(k\tilde{r}) dk. \quad (3.9)$$

La fonction $\mathcal{C}(k, t)$ est déterminée à l'aide des conditions mixtes en $\tilde{z} = 0$ ce qui conduit à la résolution des équations duales suivantes :

$$\begin{cases} \int_0^\infty k \mathcal{C}(k, t) \text{th}(kh_g(\tilde{t})) J_0(k\tilde{r}) dk = -1 & \text{pour } 0 < \tilde{r} < d(\tilde{t}), \\ \int_0^\infty \mathcal{C}(k, t) J_0(k\tilde{r}) dk = 0 & \text{pour } \tilde{r} > d(\tilde{t}). \end{cases} \quad (3.10a)$$

$$(3.10b)$$

D'après [Oliver \(2002\)](#), qui a obtenu des équations similaires en étudiant l'impact d'un solide dans un milieu fluide peu profond, ces équations peuvent être combinées pour former une seule équation intégrale pour $\mathcal{C}(k, t)$:

$$\frac{\pi}{2} \mathcal{C}(k, t) = \frac{d}{dk} \left(\frac{\sin(k)}{k} \right) + \int_0^1 \int_0^\infty \mathcal{C}(\kappa, t) [1 - \text{th}(\kappa h_g(\tilde{t}))] \sin(\kappa u) \sin(ku) d\kappa du. \quad (3.11)$$

Nous n'avons pas pour le moment de solution analytique pour ce problème. Nous allons donc, faute de mieux, chercher une solution numérique à l'aide du code de résolution d'équations aux dérivées partielles **FreeFem++** ([Hecht 2012](#)).

3.2.3.3 Solutions numérique

A l'aide de **FreeFem++** nous allons résoudre numériquement le système d'équations (3.2-3.8) pour chacune des trois configurations susceptibles d'expliquer la perte de similarité de la solution aux temps courts. Cependant, afin de pouvoir faire le calcul, la condition au loin (3.8) doit être remplacée par une condition de Dirichlet $\check{\phi} = 0$. Dans le but de se rapprocher le plus possible du modèle, le bord est placé à une distance suffisante de $d(\tilde{t})$ pour ne pas interférer sur le résultat. Sur le plan théorique un tel changement de condition induit une modification de la forme de la solution mais le comportement global de celle-ci devrait rester le même.

Nous cherchons ici à déterminer l'évolution au cours du temps de la pression au centre de l'impact. Pour cela il est nécessaire de déterminer la dérivée temporelle du potentiel des vitesses en ce point. L'idée est de partir d'une configuration comparable à l'état de la goutte aux temps courts et de reproduire le calcul après incrémentation de la

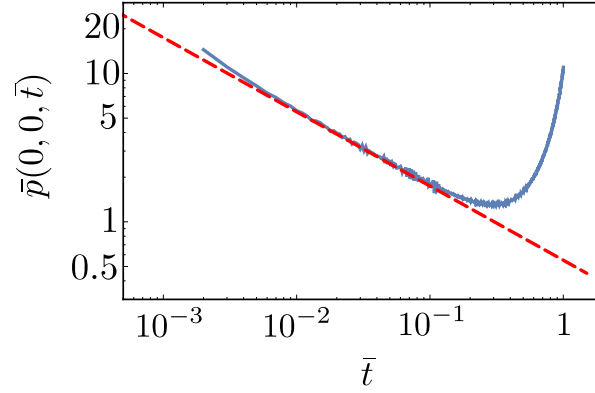


FIGURE 3.5 – Comparaison entre l'évolution au cours du temps de la pression à l'origine de l'impact déduite d'un calcul avec **FreeFem++** (courbe bleue) et la solution semblable donnée par la relation $\bar{p}(0, 0, \bar{t}) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \bar{t}^{-\frac{1}{2}}$ (courbe pointillée rouge). Aux temps courts l'accord entre les deux approches est bon. En revanche au bout d'un certain temps, la solution numérique semble diverger suggérant que les effets de confinements ne sont pas responsables de la perte de similarité telle que nous l'avons décrite.

variable temporelle des différentes lois qui interviennent dans le problème. La pression en $(\tilde{r}, \tilde{z}) = (0, 0)$ est obtenue par différence finie via la relation :

$$\tilde{p}^{n+1}(\tilde{t}) = \frac{\tilde{\phi}^{n+1} - \tilde{\phi}^n}{\Delta \tilde{t}}, \quad (3.12)$$

où $\Delta \tilde{t}$ est l'incrément de temps utilisé entre chaque calcul que nous fixons à $\Delta \tilde{t} = 10^{-3}$. Dans un premier temps, nous devons logiquement obtenir la dépendance en $\tilde{t}^{-\frac{1}{2}}$ de la solution valable aux temps courts donnée par l'équation (2.64). Puis au bout d'un certain temps, nous devons observer une incohérence dans l'évolution de la pression pour les scénarii ne représentant pas une situation physique réaliste. En revanche nous devrions obtenir un comportement similaire au résultat obtenu avec *Gerris* pour la configuration qui modélise le mieux le problème.

Nous allons dans chacune de ces expériences numériques jouer sur trois leviers différents de façon à tester une possibilité à la fois comme présenté dans le paragraphe 3.2.2. La situation se rapprochant le plus de la configuration rencontrée aux temps courts correspond à une hauteur initiale égale au diamètre de la goutte, c'est-à-dire $h_g(t = 0) = 2$, à une vitesse de chute du sommet constante au cours du temps représentant la chute libre de ce point $\dot{h}_g(t) = -1$ et enfin à une évolution de la position de la ligne de contact donnée par $d(\tilde{t}) = \sqrt{3\tilde{t}}$.

Première possibilité : effets de confinement

Pour étudier l'effet du confinement seul, nous conservons l'évolution théorique du point $d(\tilde{t})$ prévu par la solution semblable et nous supposons toujours que le sommet de la

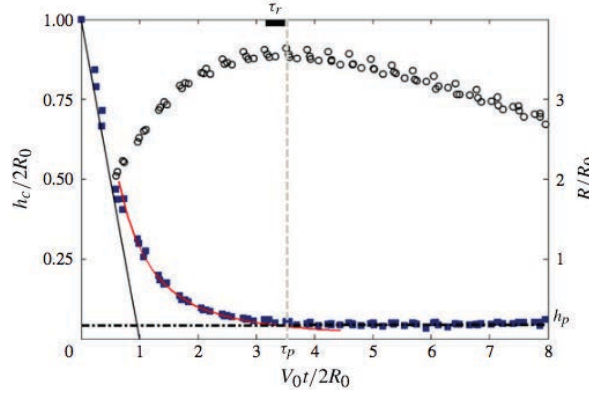


FIGURE 3.6 – Figure 3 de [Lagubeau et al. \(2012\)](#) représentant l'évolution au cours du temps de la position du sommet de la goutte correspondant à une hauteur notée h_c (carrés bleus et axe de gauche). Les nombres de Weber et de Reynolds sont respectivement $We = 214$ et $Re = 2690$. La ligne noire représente le régime de chute libre du sommet de la goutte en adéquation avec les observations de [Engel \(1955\)](#). La courbe rouge est le meilleur ajustement de la hauteur durant la phase de décélération qui selon [Lagubeau et al.](#) est de la forme $h_c(t) = \frac{A}{(B+t)^2}$ où A et B sont des coefficients dépendant des propriétés de l'impact ou déterminés expérimentalement. Il y a ensuite un régime d'étalement où la hauteur reste constante. Nous utilisons une forme très proche de celle proposée par [Lagubeau et al.](#) pour modéliser la décélération du sommet de la goutte dans notre calcul avec **FreeFem++**.

goutte tombe en chute libre. En revanche nous réduisons la position initiale du sommet à $h_g(t = 0) = 1.3$. Comme le montre la figure 3.5, la solution numérique déduite de **FreeFem++** et la solution semblable (2.64) obtenue au chapitre 2 sont en bon accord sur plus d'une décade montrant ainsi la robustesse de la solution aux temps courts. Néanmoins au bout d'un certain temps, la solution numérique semble diverger, vraisemblablement parce que la hauteur de la goutte devient trop faible comparée à $d(\tilde{t})$. Le comportement observé n'étant pas cohérent avec la réalité physique, on en déduit que les effets de confinements ne sont pas responsables de la perte de similarité telle que nous l'avons décrite au début de ce chapitre.

Deuxième possibilité : décélération du sommet

Pour estimer l'influence de la décélération du sommet de la goutte sur la pression nous devons modifier la condition de Neumann en $\tilde{z} = h_g(\tilde{t})$. Nous savons que dans un premier temps ce point tombe en chute libre ([Engel 1955](#)) puis subit une décélération à cause du champ de pression. [Lagubeau et al. \(2012\)](#) à l'aide d'observations expérimentales ont proposés la forme suivante pour la hauteur de la goutte dans ce dernier régime (Fig. 3.6) :

$$h_c(\tilde{t}) = \frac{A}{(B + \tilde{t})^2}, \quad (3.13)$$

où A et B sont des coefficients dépendant des propriétés de l'impact ou déterminés expérimentalement. Nous construisons donc artificiellement une fonction donnant la hauteur

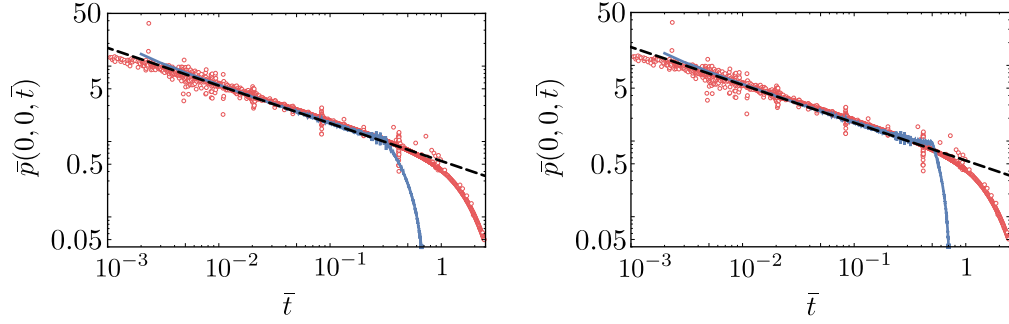


FIGURE 3.7 – Comparaison entre l'évolution au cours du temps de la pression à l'origine de l'impact déduite d'un calcul avec **FreeFem++** pour l'hypothèse de décélération du sommet de la goutte (courbe bleue) et la solution semblable donnée par la relation $\bar{p}(0, 0, \bar{t}) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \bar{t}^{-\frac{1}{2}}$ (courbe pointillée noire). La pression obtenue à l'aide de *Gerris* (voir chapitre 2) est représenté par la courbe rouge. Aux temps courts il y a un bon accord entre les différentes approches. Le changement de condition de Neumann en $\tilde{z} = h_g(\tilde{t})$ intervient pour $\tau = 0,3$ pour la figure de gauche et pour $\tau = 0,5$ pour la figure de droite. Dans les deux cas il y a une forte décroissance de la pression immédiatement après le passage de $\dot{h}_g(\tilde{t}) = \dot{h}_0(\tilde{t})$ à $\dot{h}_g(\tilde{t}) = \dot{h}_1(\tilde{t})$. Cependant la décroissance révélée par *Gerris* est bien moins brutale que celles obtenus par l'intermédiaires des deux expériences numériques réalisées à l'aide de **FreeFem++** même lorsqu'elle débute en même comme pour la figure de droite. Cela montre que la décélération du sommet de la goutte ne peut pas seule expliquer la perte de similarité.

de la goutte $h_g(\tilde{t})$ en fonction du temps et qui correspond au régime de chute libre donnée par la fonction $h_0(\tilde{t}) = 2 - \tilde{t}$ jusqu'à un temps τ au-delà duquel la hauteur est donnée par une fonction $h_1(\tilde{t})$ proche de la fonction proposée par [Lagubeau et al.](#) et définie par :

$$h_1(\tilde{t}) = \frac{A_1 \tilde{t} + B_1}{(C_1 + \tilde{t})^2}. \quad (3.14)$$

Les coefficients A_1 , B_1 et C_1 de $h_1(\tilde{t})$ sont déterminés de façon à ce que notre fonction composite soit de classe \mathcal{C}^2 en τ afin de s'assurer que cette dernière soit suffisamment régulière. Nous proposons ici de faire deux expériences numériques pour lesquelles le passage de la condition $\dot{h}_g(\tilde{t}) = \dot{h}_0(\tilde{t})$ à $\dot{h}_g(\tilde{t}) = \dot{h}_1(\tilde{t})$ se produit respectivement pour $\tau = 0,3$ et $\tau = 0,5$. Le premier calcul a pour but de voir comment se comporte la solution lorsque ce changement intervient relativement tôt de façon à ce qu'aucun autre effet ne vienne parasiter le résultat. Pour le second calcul le changement est provoqué au moment même où la décroissance de la pression commence d'après la solution numérique obtenue avec *Gerris* même si d'autres effets ont commencés à agir sur la solution. La figure 3.7 représente la comparaison entre ces expériences numériques, la solution semblable donnée par $\bar{p}(0, 0, \bar{t}) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \bar{t}^{-\frac{1}{2}}$ aux temps courts et la solution numérique issue de *Gerris*. On voit dans les deux cas qu'il y a un bon accord entre les différentes approches aux temps courts. Lorsque $\tilde{t} = \tau$, la pression déduite de **FreeFem++** décroît immédiatement de manière brutale. Pour la figure 3.7 gauche, cette décroissance intervient alors que la courbe suit encore la solution semblable ce qui montre clairement que la décélération du

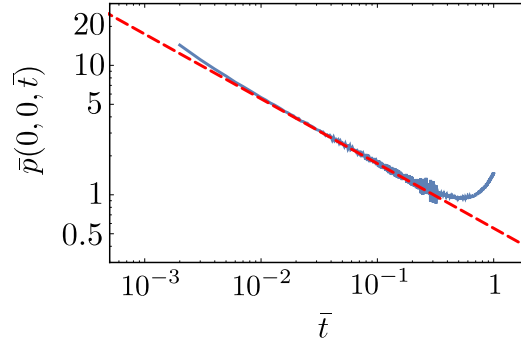


FIGURE 3.8 – Comparaison entre l'évolution au cours du temps de la pression à l'origine de l'impact déduite d'un calcul avec **FreeFem++** lorsqu'on conserve la loi semblable $d(\tilde{t}) = \sqrt{3\tilde{t}}$ sans modifier les autres conditions initiales (courbe bleue) et la solution semblable donnée par la relation $\bar{p}(0,0,\tilde{t}) = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\tilde{t}^{-\frac{1}{2}}$ (courbe pointillée rouge). On constate qu'au bout d'un certain temps la solution numérique quitte le régime autosimilaire sans toutefois avoir le comportement observé à l'aide de *Gerris*. On en déduit néanmoins que les effets géométriques ont un effet non négligeable dans ce problème. Cela est très certainement dû au fait que la loi semblable utilisée pour définir $d(\tilde{t})$ n'est plus valable aux temps intermédiaires.

sommet de la goutte à un rôle dans la chute de la pression. La figure 3.7 droite montre ce qu'il se produit lorsqu'on active cette transition à un instant compatible avec la réalité physique suggérée par *Gerris*. Ainsi on constate que la courbe commençait une déviation de la solution semblable vers le haut avant de s'effondrer. Cependant la vitesse à laquelle la pression décroît selon nos expériences numériques est bien trop importante comparé à ce que suggère la solution issue de *Gerris*. Ces résultats suggèrent que plusieurs effets, dont la décélération du sommet de la goutte, pourraient se manifester simultanément aux temps intermédiaires et engendrer la perte de similarité.

Troisième possibilité : effets géométriques

Il nous reste maintenant à vérifier l'influence des effets géométriques sur la pression. Pour cela nous conservons, comme pour les expériences numériques précédentes, la loi semblable $d(\tilde{t}) = \sqrt{3\tilde{t}}$ sans pour autant modifier les autres conditions initiales c'est-à-dire que l'on suppose que le sommet de la goutte tombe en chute libre tout au long de l'impact et que la hauteur initiale est donnée par le diamètre de la goutte. La figure 3.8 représente l'évolution de la pression au cours du temps pour cette configuration. On constate que sur deux décades la pression suit la prédiction autosimilaire puis s'écarte sans toutefois avoir le comportement observé avec *Gerris*. Compte tenu des résultats précédents et de ce constat, on peut raisonnablement penser que les effets géométriques sont responsables au même titre que la décélération du sommet de la goutte, de la perte de similarité de la solution. En effet l'expression $d(\tilde{t}) = \sqrt{3\tilde{t}}$ n'est valable qu'aux temps courts. On peut donc imaginer que le comportement de la pression est affecté lorsque cette approximation cesse d'être valable.

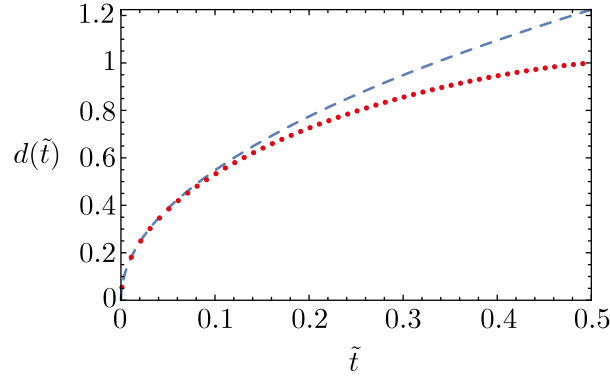


FIGURE 3.9 – Représentation de la position la ligne de contact $d(\tilde{t})$ au cours du temps. La courbe discontinue bleue représente la solution $d(\tilde{t}) = \sqrt{3\tilde{t}}$ obtenue par l’intermédiaire de l’approximation de la condition de Wagner valable aux temps courts et la courbe discontinue rouge représente la solution exacte obtenue numériquement.

Pour être en mesure de décrire correctement la physique aux temps intermédiaires il est nécessaire d’obtenir une loi pour $d(\tilde{t})$ plus réaliste de façon à ce que son expression soit valable même sur les temps longs.

3.3 Perspectives

3.3.1 Détermination théorique de $d(\tilde{t})$ sans approximation

Nous avons montré au paragraphe 2.2.3 que pour déterminer la position de ce point nous pouvons partir de l’équation de la sphère non perturbée impactant la surface solide donnée par $\bar{r}^2 + (\bar{z} - (1 - \bar{t}))^2 = 1$ ou encore $\bar{z} = 1 - \sqrt{1 - \bar{r}^2} - \bar{t}$ pour la partie inférieure de la sphère. En considérant par la suite que nous étions proche de la zone de contact et que $\bar{r} \ll 1$, nous pouvons après changement d’échelle considérer l’approximation parabolique $1 - \sqrt{1 - \bar{r}^2} \simeq \frac{1}{2}\bar{r}^2$. En perturbant ensuite cette surface nous en avons déduit la condition de Wagner nous conduisant à l’expression $d(\tilde{t}) = \sqrt{3\tilde{t}}$. L’idée maintenant est de reprendre cette analyse mais sans approximation.

L’expression de $d(\tilde{t})$ étant conditionnée par la géométrie nous pouvons utiliser la relation (2.136) de Oliver (2002) qui permet d’obtenir le résultat cherché dans le cadre du problème du *water entry* quelque soit la forme de l’objet impactant un liquide et qui est donnée par :

$$\tilde{t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(d(\tilde{t}) \sin(\theta)) \sin(\theta) \, d\theta, \quad (3.15)$$

où f est l’équation de la surface en chute libre. Cette équation découle directement d’une condition cinématique très proche de ce que nous avons présenté au chapitre 2 et de la

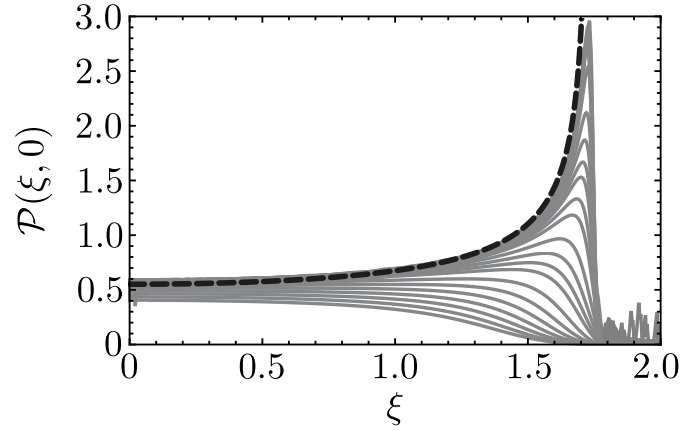


FIGURE 3.10 – Solution numérique de la pression le long du rayon mouillé dans l’espace autosimilaire en $\eta = 0$ entre $\bar{t} = 5 \cdot 10^{-3}$ et $\bar{t} = 1$ (courbes grises). La courbe noire représente la solution analytique donnée par $\mathcal{P}(\xi, \eta = 0) = \frac{3}{\pi\sqrt{3-\xi^2}}$. Au niveau de l’axe, l’accord entre les deux approches est bon à partir de $\bar{t} = 5 \cdot 10^{-3}$ jusqu’à la perte de similarité de la solution pour $\bar{t} \simeq 0,5$. Près de la ligne de contact la pression est régularisée vraisemblablement par la présence la nappe liquide. Les nombres de Reynolds et de Weber associés à l’impact sont respectivement de $Re = 5000$ et $We = 250$.

condition de Wagner associé à la configuration d’[Oliver](#). Nous pouvons appliquer cette relation à notre étude en vertu des fortes analogies existantes entre les deux problèmes.

Dans notre cas, en reprenant le raisonnement précédent sur la représentation de la goutte par une sphère non perturbée on en déduit que la fonction f appropriée est donnée par $f(\tilde{r}) = 1 - \sqrt{1 - \tilde{r}^2}$. L’équation 3.15 peut alors se résoudre numériquement et ainsi nous permettre d’obtenir une loi pour $d(\tilde{t})$ plus réaliste (Fig. 3.9). On peut donc espérer obtenir un résultat dont le comportement soit similaire à la solution numérique obtenue avec *Gerris*. Cependant cette description est insuffisante puisque par définition, en déterminant $d(\tilde{t})$ à l’aide de l’équation d’un cercle, cette nouvelle loi n’a plus aucun sens au-delà de $\tilde{t} = 0,5$. En effet pour ce temps là, $d(\tilde{t})$ atteint la valeur 1, qui est son maximum, avant de décroître par la suite.

Nous avons vraisemblablement mis ici en évidence les limites de la théorie wagnérienne que nous avons présenté jusque là. Pour être plus précis dans la description de ce régime nous allons devoir trouver un nouveau modèle qui permette de tenir compte de manière plus réaliste de cette transition.

3.3.2 Influence sur la force induite par la goutte sur le support

Comme nous l’avons expliqué précédemment, la perte de similarité aux temps intermédiaires entraîne une chute de la pression au voisinage de la zone d’impact. Ce changement de comportement va être également répercuté sur la forme de la solution du champ de

pression le long du rayon mouillé comme on peut le constater sur la figure 3.10 qui étend la solution numérique obtenue avec *Gerris* au chapitre 2 jusqu'à $\tilde{t} = 1$. La décroissance de la pression à l'origine est un des facteurs à prendre en compte avec la régularisation de la pression au niveau de la ligne de contact pour expliquer la chute de la force normale induite par l'impact d'une goutte, qui se détermine formellement par intégration de la pression le long du rayon mouillé. En effet l'expérience montre qu'après une phase de croissance très rapide, cette force décroît au cours du temps (Soto *et al.* 2014; Nearing *et al.* 1986). Afin de quantifier cette décroissance une étude plus poussée des événements se produisant aux temps intermédiaires est nécessaire.

3.4 Conclusion

Les simulations numériques obtenues avec *Gerris* montrent que pour des temps intermédiaires ($\tilde{t} \sim 1$), la pression à l'origine de l'impact décroît brutalement et quitte ainsi le régime semblable que nous avons décrit au chapitre 2. Afin de déterminer les causes de cette perte de similarité nous avons modifié légèrement le modèle proposé au chapitre précédent de façon à tenir compte de l'influence potentielle du sommet de la goutte. À l'aide d'expériences numériques réalisées avec le logiciel de résolution d'équations aux dérivées partielles *FreeFem++* (Hecht 2012), nous avons étudié trois situations différentes permettant de mettre en évidence l'influence relatives de trois effets pouvant se manifester aux temps intermédiaires et ainsi expliquer le comportement observé, à savoir, les effets de confinement qui peuvent avoir une influence sur les solutions de l'équation de Laplace (Cooker et Peregrine 1995), la décélération du sommet de la goutte due au champ de pression et enfin les effets géométriques dû à la fin de la validité de la loi semblable donnant la position de la ligne de contact. Nous avons montré que les deux dernières possibilités sont vraisemblablement les responsables de la perte de similarité de la solution. Nous avons également mis en évidence que ce régime est compliqué à capturer avec les outils et les analogies que nous avons développés au cours de cette thèse puisque la théorie de Wagner arrive à ses limites au moment où la pression commence à décroître. Une nouvelle modélisation est donc nécessaire afin d'obtenir une compréhension plus profonde de l'impact pour les temps intermédiaires.

Chapitre 4

Dynamique en temps long : de l'impact de goutte vers les cloches liquides impulsivielles

4.1 Introduction

4.1.1 Le problème de Rozhkov

Nous avons déjà vu dans le chapitre 1 qu'une goutte de rayon initial et de vitesse d'impact connu pouvait avoir des comportements aux temps longs bien différents suivant la nature du substrat sur lequel elle impacte. Considérons le cas particulier de l'impact d'une goutte sur un disque de taille comparable au diamètre initial de celle-ci ([Rozhkov et al. 2002, 2004](#); [Villermaux et Bossa 2011](#)). Dans cette situation, immédiatement après l'impact de la goutte on observe la formation d'une fine nappe liquide qui s'étend radialement. Très rapidement la corolle à l'extrémité de la nappe se déstabilise et forme localement des points de rebroussements faisant émerger de fins ligaments dans la direction radiale. Les gouttes observées, quant à elles, sont issues de la fragmentation de ces mêmes ligaments comme montré Fig. 4.1, issue de l'étude de [Villermaux et Bossa](#).

Trois problématiques différentes se dégagent de cette expérience :

1. l'étude de la dynamique de la nappe,
2. l'étude de la fragmentation de cette dernière,
3. la détermination de la distribution de la taille des gouttes engendrées.

L'étude des deux derniers points ne sera pas abordée dans ce chapitre. Ces questions sont en revanche traitées dans [Villermaux et Bossa \(2011\)](#).

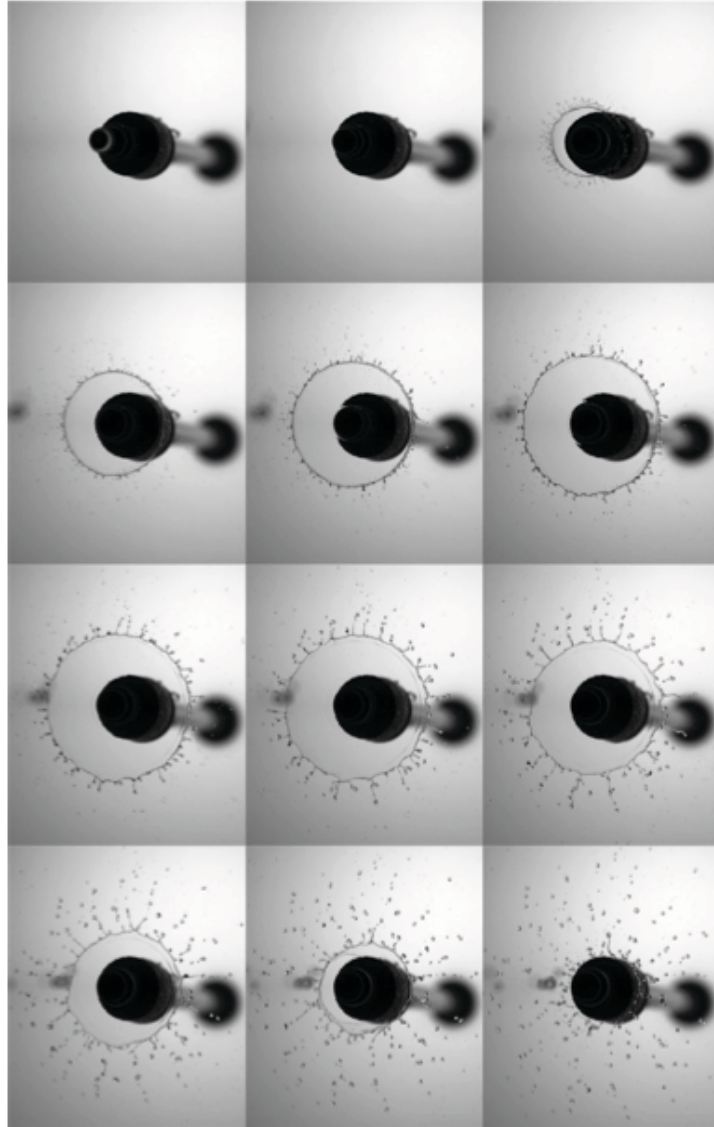


FIGURE 4.1 – Figure 2 de [Villermaux et Bossa \(2011\)](#) représentant l'impact d'une goutte d'éthanol de diamètre initial $d_0 = 6$ mm sur un impacteur de même diamètre pour un nombre de Weber $We = 1200$ engendrant la formation d'une nappe liquide qui très vite se fragmente. L'intervalle de temps entre chaque image est de $1/500$ s.

Par ailleurs nous avons déjà longuement discuté dans les chapitres précédents des analogies existantes entre le problème de l'impact de goutte et son dual, l'impact d'un objet solide dans un bain liquide. Dans ce chapitre nous voudrions développer une analogie avec un autre aspect des problèmes d'impact : leur caractère impulsif. Comme évoqué dans l'introduction du présent mémoire, de nombreux problèmes d'impact peuvent être caractérisés par l'impulsion engendrée par la rencontre d'un solide et d'une surface fluide comme lors de la course du basilic à travers une rivière ([Hsieh et Lauder 2004](#)) ou encore dans le jeu du ricochet ([Clanet *et al.* 2004](#)). Nous appelons ici impulsion l'accélération très importante d'une frontière d'un domaine fluide sur des temps très courts. Ce

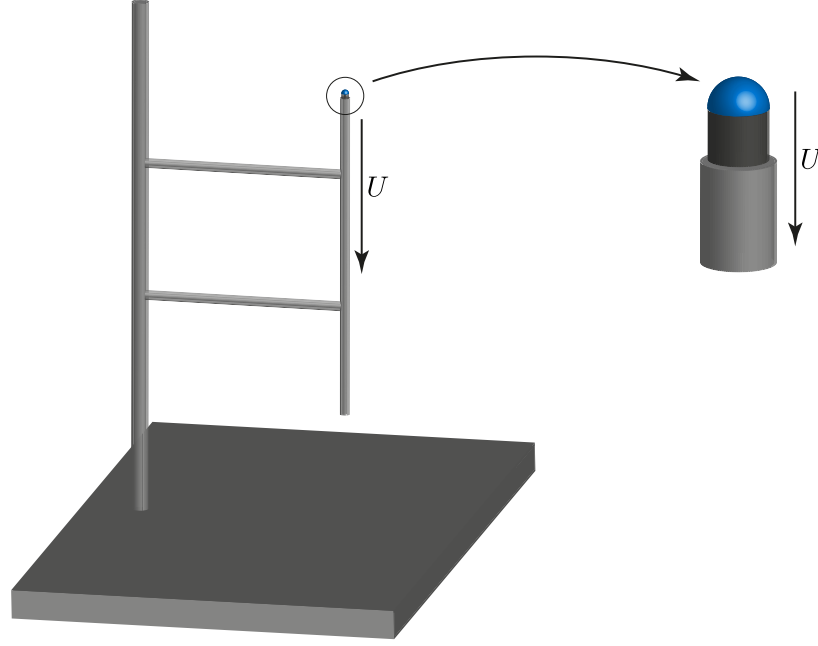


FIGURE 4.2 – Dispositif expérimental utilisé pour revisiter le problème de [Rozhkov *et al.*](#) du point de vue impulsionnel. Un cylindre avec une goutte posée à son sommet tombe en chute libre. La verticalité du cylindre lors de la chute est assurée par un système de guidage basé sur le principe de la potence. Lorsque que cylindre touche le sol, la goutte subit un changement violent de vitesse.

concept a déjà été utilisé avec succès pour la résolution de problèmes de nature *a priori* bien différentes ([Cooke et Peregrine 1995](#); [Antkowiak *et al.* 2007](#)).

4.1.2 Dispositif expérimental

Nous souhaitons revisiter dans ce chapitre le problème de [Rozhkov *et al.* \(2002\)](#) à la lumière du point de vue impulsionnel. Nous proposons donc une expérience dans laquelle une goutte est posée sur un support cylindrique de même rayon R , l'ensemble devant tomber en chute libre. La verticalité du cylindre lors de la chute est assuré par un système de guidage basé sur le principe de la potence comme représenté sur le schéma Fig. 4.2. La vitesse d'impact U peut être choisie en modifiant la hauteur de chute H du cylindre grâce à la relation $U = \sqrt{2gH}$. Lorsque le cylindre touche le sol, la goutte va subir immédiatement les effets de l'arrêt brutal du cylindre. Nous ne considérons ici que les cas où le rayon de la goutte est inférieur à la longueur gravito-capillaire pour que celle-ci ait une forme de demie sphère. Nous présentons ici deux exemples d'une telle expérience filmées à l'aide d'une caméra rapide Photron Fastcam SA5 pour des gouttes d'eau de rayon initial $R = 2$ mm. La fréquence d'acquisition est dans les deux cas de 12000 images/s.

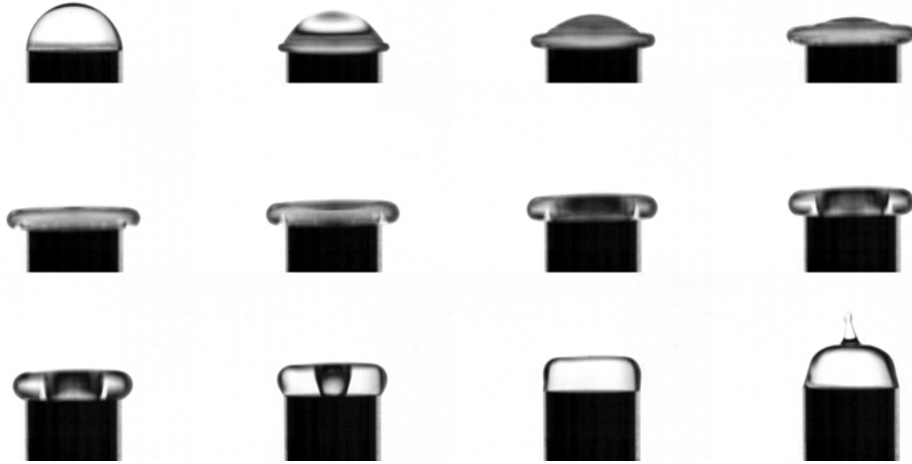


FIGURE 4.3 – Séquence représentant un impact *capillaire* pour une goutte d’eau de 2 mm de rayon à la vitesse $U = 0,44 \pm 0.02 \text{ m.s}^{-1}$ soit $Re = 886$ et $We = 6$. L’intervalle de temps entre chaque images est de $1/12000 \text{ s}$. Dans ce régime la capillarité domine et le comportement de la goutte ressemble à un impact sur surface hydrophobe (Renardy *et al.* 2003; Bartolo *et al.* 2006).

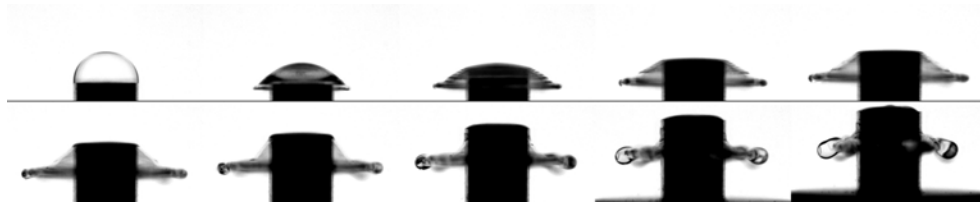


FIGURE 4.4 – Séquence représentant un impact *inertiel* pour une goutte d’eau de 2 mm de rayon à la vitesse $U = 1,2 \pm 0.02 \text{ m.s}^{-1}$ soit $Re = 2343$ et $We = 40$. Dans ce régime l’inertie domine et l’impact engendre la formation d’une cloche liquide. L’intervalle de temps entre chaque images est de $1/12000 \text{ s}$.

Dans le premier cas la hauteur de chute du cylindre est $H = 1 \text{ cm}$ soit une vitesse d’impact $U = 0,44 \pm 0.02 \text{ m.s}^{-1}$. Dans cette configuration nous avons donc $Re = 886$ et $We = 6$. Il s’agit alors d’un régime où la capillarité est dominante sur l’inertie comme le montre la figure 4.3 représentant l’évolution de la goutte après impact. On remarque la formation d’un bourrelet qui par la faible inertie de la goutte ne va que très peu se développer ainsi que la présence d’ondes capillaires à la surface libre. Le sommet de la goutte quant à lui s’affaisse jusqu’à former une cavité au centre de celle-ci. Les parois de la goutte devenue toroïdale se rapprochent jusqu’à se rencontrer et ainsi déclencher la formation d’un jet. Ce comportement n’est pas sans rappeler l’impact d’une goutte sur une surface hydrophobe (Renardy *et al.* 2003; Bartolo *et al.* 2006).

Le cylindre chute d’une hauteur $H = 7 \text{ cm}$ dans le second cas ce qui correspond à une vitesse d’impact $U = 1,2 \pm 0.02 \text{ m.s}^{-1}$ soit $Re = 2343$ et $We = 40$. A cette vitesse, le système est dans un autre régime où l’inertie est l’effet dominant. En effet, comme

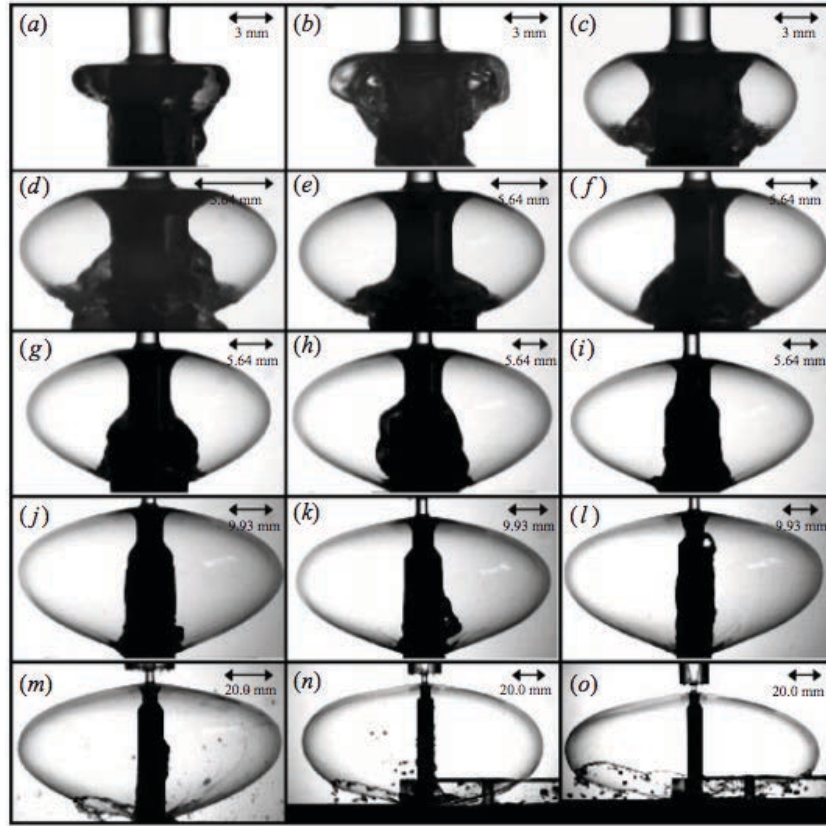


FIGURE 4.5 – Figure 7 de [Clanet \(2001\)](#) représentant l'influence de la vitesse d'impact sur la forme de la nappe. Les vitesses varient de $0,63$ à $3,67 \text{ m.s}^{-1}$. Le diamètre du jet est $D_0 = 3 \text{ mm}$ et le diamètre de l'impacteur est $D_i = 9,87 \text{ mm}$.

le montre la figure 4.4 l'impact est suivi par la formation d'une fine nappe liquide qui va s'étendre jusqu'à atteindre un rayon maximal. La nappe se rétracte ensuite lorsque la tension de surface devient dominante. On remarque que dans ce cas il n'y a pas de fragmentation engendrant la formation de gouttes comme dans le problème de [Rozhkov et al. \(2002\)](#); [Villiermaux et Bossa \(2011\)](#). En revanche lors de la phase transitoire la nappe peut être vue comme un cas particulier de cloche liquide ouverte (*water bell* en anglais) dont l'évolution serait instationnaire. Le problème original, étudié par Félix Savart en 1833, consiste à faire impacter un jet à vitesse constante sur un disque circulaire de taille comparable à celui-ci ([Savart 1833a,b](#)). La forme de la nappe dépend notamment du ratio entre la diamètre du jet et le diamètre de l'impacteur, et de la vitesse du jet impactant ([Clanet 2001](#)). La figure 4.5 extraite de l'article de [Clanet](#) représente l'évolution de la forme des cloches en fonction de la vitesse pour un ratio de diamètre fixe. On constate qu'au delà d'une vitesse critique le liquide est éjecté de l'impacteur avec un certain angle, noté ψ_0 par [Clanet](#) et défini Fig. 4.6, pour former une cloche liquide fermée. Pour des vitesses plus importantes on observe une transition dans la forme de la cloche puisqu'un trou apparaît à sa base. Le problème de la stabilité de ces cloches a également été étudié par [Clanet](#).

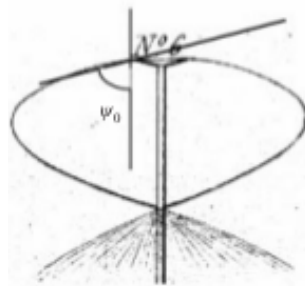


FIGURE 4.6 – Figure 1 (c) de [Clanet \(2001\)](#) définissant l’angle d’éjection ψ_0 . La figure originale provient de l’article fondateur de [Savart \(1833a\)](#).

Le régime inertiel du problème impulsif proposé ici présente des analogies évidentes avec les cloches liquides de Savart. Nous appellerons dorénavant les cloches liquides engendrées de manière impulsif par un impact *cloches liquides impulsives* (*impulsive water bells* en anglais). Le présent chapitre leur sera consacré.

Compte tenu de ces expériences préliminaires, quelques questions se posent très clairement :

- Quelle est la vitesse de la corolle et quel est le rayon maximal atteint avant que la nappe ne se rétracte par l’action de la capillarité ?
- Quel est l’angle d’éjection de la nappe et quelle est la forme de la cloche liquide ?
- Quel est l’épaisseur de la nappe liquide ? Quel est la nature de l’écoulement au sein de celle-ci ?
- Dans quelle mesure une cloche liquide impulsif diffère-t-elle d’une cloche liquide alimentée par un jet continu ?
- En quoi est-ce différent du problème de [Rozhkov et al. \(2002\)](#) ?
- Existe-t-il une analogie avec les jets de décharges ([Ghabache 2015](#)) ?

Le but ici n’est pas de répondre à toutes ces questions mais de donner quelques pistes de réflexions en essayant de s’inspirer de quelques études citées précédemment.

4.2 Instants initiaux

Nous commençons par nous intéresser aux instants initiaux de l’impact. En particulier nous voulons déterminer le champ de vitesse à l’intérieur de la goutte juste après le contact entre le cylindre et le substrat solide. Nous allons notamment nous servir du caractère impulsif du problème pour sa modélisation.

4.2.1 Définition du problème impulsioneel

Depuis les travaux fondateurs de [Wagner \(1932\)](#) sur l'atterissage des hydravions, la notion d'impact a été enrichie par le concept de pression impulsioneelle, vraisemblablement introduit par [Bagnold](#) dès 1939 avec un modèle tenant compte de la compression de la couche d'air comprise entre une vague et la paroi contre laquelle elle s'écrase. Ce concept est également très bien expliqué par [Batchelor \(1967\)](#) dans le §6.10 de son *Introduction to fluid dynamics*. L'idée est de remarquer qu'un changement brutal dans le mouvement d'une des frontières du domaine fluide va engendrer de grands gradients de pression qui en retour produisent un changement brutal de vitesse en tout point du fluide. Ce changement a lieu durant un temps tellement court que les termes non linéaires de l'équation de quantité de mouvement sont clairement négligeables comparés à la dérivée temporelle de la vitesse. Autrement dit le temps caractéristique τ durant lequel se produit l'évènement (qu'on pourrait appeler *temps d'impact*), d'ordre 10^{-4} secondes, est très faible devant le temps convectif R/U . On en déduit alors que la dérivée temporelle de la vitesse n'est équilibrée que par le gradient de la pression et le problème à l'ordre dominant s'écrit par conséquent ([Batchelor 1967](#)) :

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (4.1)$$

En intégrant l'équation (4.1) sur la durée de l'impact, nous obtenons :

$$\underline{u}_{\text{impact}} = \underline{u}(\tau) - \underline{u}(0) = -\frac{1}{\rho} \nabla P, \quad (4.2)$$

où P est la pression impulsioneelle définie par :

$$P = \int_0^\tau p(\underline{x}, t) dt.$$

Dans ce problème l'écoulement est considéré incompressible. Les arguments présentés au chapitre 1 pour valider cette hypothèse peuvent être en effet réutilisés dans le cadre des cloches liquides impulsioneelles. L'équation de conservation de la masse est donc réduite à :

$$\text{div}(\underline{u}) = 0. \quad (4.3)$$

En combinant les équations (4.2) et (4.3) nous en déduisons que la pression impulsioneelle est une fonction harmonique :

$$\nabla^2 P = 0.$$

Les effets de la viscosité, de la tension de surface et de la gravité sont négligés dans cette étude puisque ce problème est avant tout de nature inertielle. Autrement dit nous ne considérons que les cas où les nombres de Reynolds, de Weber et de Froude sont élevés. Nous remarquons cependant que certains de ces effets, y compris les effets non linéaires peuvent devenir dominants dans certaines régions au cours de l'impact. En particulier les effets visqueux deviennent importants près de la paroi solide, dans la couche limite d'épaisseur $\sqrt{\nu\tau}$, où ν désigne la viscosité cinématique. De même les effets de la tension de surface et les effets non linéaires peuvent jouer un rôle majeur près de la ligne de contact. Nous supposons également qu'il n'y a pas d'écoulement dans la goutte avant l'impact ce qui revient à dire que la vitesse dans la goutte est nulle dans son propre référentiel.

A titre d'exemple, des cas particuliers d'impacts modélisés en deux dimensions sont traités dans l'annexe C comme le problème de l'impact d'une vague sur une digue de [Cooker et Peregrine \(1995\)](#).

4.2.2 Modélisation

Comme précisé dans l'introduction de ce chapitre nous ne considérons que des gouttes dont le rayon est inférieur à la longueur gravito-capillaire. Nous pouvons donc supposer que la goutte reposant sur un cylindre de même rayon aura une forme hémisphérique parfaite. Etant donnée la symétrie naturelle du problème un système de coordonnées sphériques sera privilégié. Par ailleurs nous venons de montrer que la résolution du problème impulsioneel se réduit à la résolution d'une équation de Laplace. Cette équation est complétée par (i) une condition dynamique représentant la continuité des contraintes normales sur la surface libre et (ii) une condition représentant la brusque variation de vitesse $\underline{u} \cdot \underline{e}_z = U_0$ au niveau du support au moment de l'impact, où \underline{e}_z est le vecteur unitaire porté par l'axe vertical. Ces deux conditions peuvent être mises sous la forme suivante :

$$P(r = R) = 0 \quad (4.4)$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{z=0} = -\rho U_0. \quad (4.5)$$

Le modèle complet est résumé Fig. 4.7.

On remarque que $P_0 = -\rho U_0 z$ est une solution particulière de l'équation de Laplace respectant la condition aux limites de Neumann (4.5). On peut alors, pour des raisons de commodité pour la résolution du problème, considérer la translation du champ de

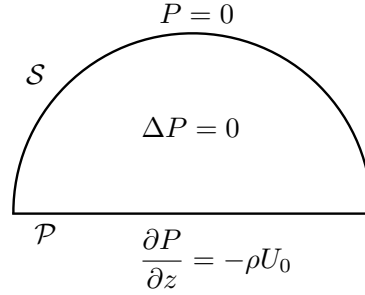


FIGURE 4.7 – Modélisation du problème impulsioneel de [Savart](#) au moment de l'impact pour une goutte de rayon R . Ce problème est régi par une équation de Laplace pour la pression impulsioneelle avec une condition aux limites de Dirichlet $P = 0$ sur la surface libre (\mathcal{S}) et une condition aux limites de Neumann $\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho U_0$ sur le support cylindrique (\mathcal{P}).

pression impulsioneelle suivante : $P = -\rho U_0 z + \tilde{P}$. Le problème à résoudre devient alors :

$$\Delta \tilde{P} = 0,$$

complétée par les conditions aux limites :

$$\tilde{P}(r = R) = \rho U_0 z \quad (4.6)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{P}}{\partial z} \right|_{z=0} = 0. \quad (4.7)$$

La condition de Neumann (4.7) est équivalente à la relation $\underline{\nabla} \tilde{P} \cdot \underline{e}_z = 0$ pour $z = 0$. D'autre part en désignant par θ l'angle que fait le vecteur unitaire \underline{e}_r avec la verticale nous avons $z = r \cos \theta$. Le vecteur \underline{e}_z s'exprime alors de la façon suivante :

$$\underline{e}_z = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons alors une nouvelle condition aux limites :

$$\left. \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \theta} \right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0. \quad (4.8)$$

4.2.3 Détermination du champ de vitesse

En coordonnées sphériques la solution d'une équation de Laplace est donnée par une somme de solutions élémentaires régulières (et axisymétrique dans notre cas) appelées

harmoniques sphériques. Ces solutions sont de la forme :

$$F_n(r, \theta) = r^n P_n(\cos \theta).$$

où P_n est un polynôme de Legendre de degré n . La dérivée de ces solutions par rapport à z est donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial z} F_n(r, \theta) = nr^{n-1} P_{n-1}(\cos \theta). \quad (4.9)$$

En décomposant la solution en une partie paire et en une partie impaire et sachant que pour tout entier n , $P_{2n+1}(0) = 0$, la condition (4.8) et la relation (4.9) impliquent que la solution du problème doit être de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} A_{2n} F_{2n}$ (Antkowiak *et al.* 2007). La pression impulsioneelle est alors donnée par la relation suivante :

$$\tilde{P}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_{2n} P_{2n}(\cos \theta) r^{2n}. \quad (4.10)$$

Les coefficients A_{2n} sont déterminés à l'aide de la condition aux limites sur la surface libre $\tilde{P}(r = R, \theta) = \rho U_0 z$ pour tout θ .

$$\tilde{P}(r = R, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_{2n} P_{2n}(\cos \theta) R^{2n} = \rho U_0 R \cos \theta.$$

Sachant que $\cos \theta = P_1(\cos \theta)$ et en posant $x = \cos \theta$ la relation précédente devient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A_{2n} P_{2n}(x) R^{2n} = \rho U_0 R P_1(x). \quad (4.11)$$

Dans le domaine liquide, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, on a donc $0 \leq \cos \theta \leq 1$. Par conséquent en multipliant (4.11) par $P_{2m}(x)$ pour $m \neq 0$ et en intégrant sur $x \in [0, 1]$ nous obtenons :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A_{2n} R^{2n} \int_0^1 P_{2n}(x) P_{2m}(x) dx = \rho U_0 R \int_0^1 P_1(x) P_{2m}(x) dx. \quad (4.12)$$

En utilisant la propriété d'orthogonalité des polynômes de Legendre suivante :

$$\int_0^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2n+1} & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } m \neq n, m \text{ et } n \text{ ont la même parité} \\ f_{m,n} & \text{si } m \text{ pair, } n \text{ impair,} \\ f_{n,m} & \text{si } n \text{ pair, } m \text{ impair.} \end{cases}$$

avec

$$f_{m,n} = \frac{(-1)^{\frac{m+n+1}{2}} m!n!}{2^{m+n-1}(m-n)(m+n+1)[(\frac{m}{2})!]^2[(\frac{n-1}{2})!]^2},$$

on remarque que tous les termes de la somme sont nuls exepé lorsque $n = m$ (Byerly 1893). En particulier nous avons les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} \int_0^1 P_{2n}(x)P_{2m}(x)dx &= \frac{1}{4m+1} \\ \int_0^1 P_1(x)P_{2m}(x)dx &= f_{2m,1} = \frac{(-1)^{m+1}(2m)!}{2^{2m}(2m-1)(2m+2)(m!)^2} \end{aligned}$$

La relation (4.12) se réduit donc à :

$$\frac{A_{2m}R^{2m}}{4m+1} = \rho U_0 R f_{2m,1}.$$

On en déduit l'expression générale des coefficients de la série pour m différent de zéro :

$$A_{2m} = \rho U_0 \frac{(4m+1)}{R^{2m-1}} f_{2m,1} = \frac{\rho U_0}{R^{2m-1}} \frac{(-1)^{m+1}(4m+1)}{(2m-1)(2m+2)} \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}.$$

Pour le cas où $m = 0$ il suffit de remarquer que $\int_0^1 P_{2m}(x)dx = 0$ sauf pour $m = 0$ où cette intégrale vaut 1. De plus $\int_0^1 P_1(x)dx = \frac{1}{2}$. On en déduit la valeur de A_0 :

$$A_0 = \frac{1}{2}\rho U_0 R.$$

Au final la pression impulsioneelle est donnée par :

$$P(r, \theta) = -\rho U_0 z + \rho U_0 R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(4n+1)}{(2n-1)(2n+2)} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} P_{2n}(\cos \theta) \left(\frac{r}{R}\right)^{2n}. \quad (4.13)$$

Le champ de vitesse dans le référentiel de la goutte au moment de l'impact est obtenu en combinant les équations (4.2) et (4.13) :

$$\vec{u}_{\text{impact}|R_{\text{goutte}}}(r, \theta) = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} P_{2n}(\cos \theta) r^{2n} \right). \quad (4.14)$$

Dans le référentiel du laboratoire, l'expression précédente devient :

$$\vec{u}_{\text{impact}}(r, \theta) = U_0 \vec{e}_z - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} P_{2n}(\cos \theta) r^{2n} \right).$$

Les iso-valeurs du champ de pression impulsioneelle et de la composante radiale du champ de vitesse déterminées à partir des deux relations précédentes sont représentés sur la figure 4.8. On constate que dans ce problème, le maximum de la pression est bien

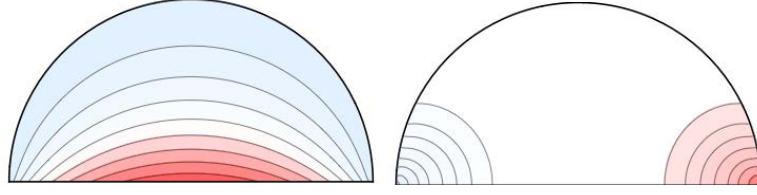


FIGURE 4.8 – Gauche : Iso-valeurs du champ de pression impulsioneelle représentées à partir de la l'équation 4.13. On constate que dans ce cas la pression est maximale au centre. Droite : Iso-valeurs de la composante radiale du champ de vitesse. En valeur absolue, la vitesse maximale est située au niveau de la ligne de contact.

au centre alors que la vitesse radiale est maximale en valeur absolue au niveau de la ligne de contact.

Une approche alternative utilisant la méthode des intégrales de frontières pour la détermination de la vitesse de glissement est proposée dans l'annexe D.

4.2.4 Comportement du champ de vitesse

Nous nous intéressons ici à quelques cas particuliers de la valeur du champ de vitesse afin de mieux appréhender la nature de l'écoulement dans les instants initiaux du problème.

4.2.4.1 Vitesse de glissement

Nous allons dans un premier temps déterminer la vitesse de glissement qui par définition correspond à la vitesse le long du substrat ou autrement dit à la composante radiale du champ de vitesse en $\theta = \frac{\pi}{2}$, $u_r(r, \theta = \frac{\pi}{2})$ que nous noterons simplement $u_e(r)$ comme dans le chapitre 2. Nous déduisons directement de l'équation (4.14) la relation recherchée :

$$\begin{aligned} u_e(r) &= -\frac{1}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} 2n A_{2n} P_{2n}(0) r^{2n-1} \\ &= -U_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2n(4n+1)}{(2n-1)(2n+2)} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} P_{2n}(0) \left(\frac{r}{R}\right)^{2n-1}. \end{aligned}$$

Les polynômes de Legendre de degré pair évalués en zéro ont pour expression :

$$P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \binom{2n}{n}.$$

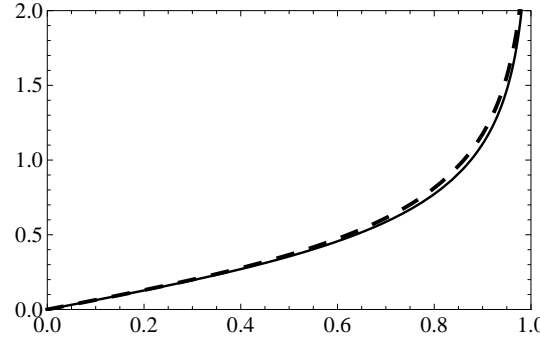


FIGURE 4.9 – Superposition de la solution analytique (ligne continue) et de son équivalent au voisinage de la ligne de contact (ligne pointillée). L'approximation est en bon accord avec la solution au voisinage de la ligne de contact ainsi qu'au voisinage de l'axe de symétrie.

En posant $u_e = U_0 \bar{u}_e$ et $r = R\bar{r}$, la vitesse de glissement adimensionnée est donnée par la relation suivante :

$$\bar{u}_e(\bar{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(4n+1)}{(2n-1)(n+1)} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right)^2 \bar{r}^{2n-1}. \quad (4.15)$$

On remarque que la solution que nous venons d'obtenir est singulière au niveau de la ligne de contact c'est à dire lorsque $\bar{r} = 1$. En effet en s'appuyant sur la formule de Stirling donnée par :

$$n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n.$$

nous en déduisons que :

$$\left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right)^2 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\pi n}. \quad (4.16)$$

Par conséquent le terme général de la série est équivalent au voisinage de l'infini à $\frac{2}{\pi n}$. Nous en déduisons qu'au voisinage de la ligne de contact *i.e* lorsque \bar{r} est proche de 1, on a :

$$\bar{u}_e(\bar{r}) \underset{\bar{r} \rightarrow 1}{\sim} \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{r}^{2n-1}}{n}.$$

On reconnait alors le développement en série entière du logarithme et nous en déduisons l'équivalent suivant :

$$\bar{u}_e(\bar{r}) \underset{\bar{r} \rightarrow 1}{\sim} -\frac{2}{\pi} \frac{\log(1 - \bar{r}^2)}{\bar{r}}, \quad (4.17)$$

ce qui montre que la vitesse de glissement diverge logarithmiquement près de la ligne de contact. La figure 4.9 représente la superposition de la solution analytique avec l'ap-

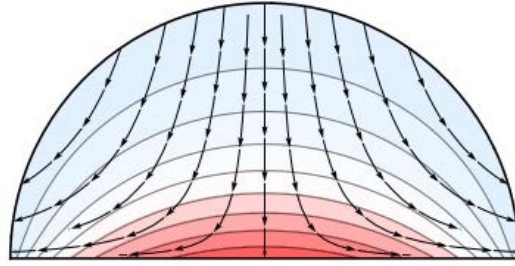


FIGURE 4.10 – Représentation à partir de l'équation (4.14) du champ de vitesse dans la goutte au moment de l'impact. On retrouve notamment une structure de point d'arrêt. La singularité a été supprimée artificiellement sur cette figure.

proximation logarithmique. On peut voir que l'accord entre la solution exacte et son approximation au voisinage de la ligne de contact est bon même quand on est proche de l'axe de symétrie de la goutte c'est à dire au voisinage de $r = 0$.

Remarque sur la singularité : La singularité logarithmique que nous rencontrons ici n'est en réalité pas très surprenante. Ce type de comportement est universel et est souvent rencontré en théorie du potentiel dans de nombreux problèmes : transferts thermiques, mécanique de la rupture (singularité épine (Leguillon 1993)) ou encore en mécanique des fluides (Rayleigh 1911). De plus, il est possible d'obtenir une singularité de nature différente lorsque la forme du domaine change comme par exemple dans des problèmes d'évaporation qui mettent en jeu des gouttes dont la forme s'approche de la forme d'une calotte sphérique (Deegan *et al.* 1997). Cette singularité dans le coin provient du changement de nature aux coins des conditions aux limites (de Dirichlet vers Neumann). La question de la régularisation de la singularité est assez délicate. On pourrait penser *a priori* à une régularisation de nature visqueuse mais l'épaisseur de la couche limite tend vers zéro au voisinage de la ligne de contact. Il est probable que dans cette zone les effets non linéaires ne soient plus négligeables et que par conséquent l'équation (4.1) ne soit plus valable. Cet aspect ne sera pas plus développé dans ce chapitre mais il nous semble que cela fait partie des points importants sur lesquels nous pourrions nous concentrer à l'avenir.

4.2.4.2 Structure de point d'arrêt

La figure 4.10 représente le champ de vitesse dans la goutte au moment de l'impact obtenu à partir de l'équation (4.14). Comme nous pouvions nous y attendre, le champ de vitesse possède un point d'arrêt (Hiemenz, 1911). En déterminant le premier mode de chaque composante du champ de vitesse nous obtenons la solution de point d'arrêt

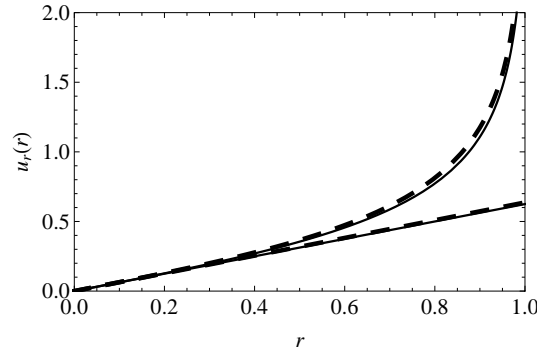


FIGURE 4.11 – Comparaison entre la solution analytique de la vitesse de glissement (ligne continue) et son approximation logarithmique (ligne pointillée) ainsi que leur développement au premier ordre respectifs au voisinage de l'origine. On constate un très bon accord dans tous les cas grâce à l'approximation $\frac{5}{8} \simeq \frac{2}{\pi}$.

suivante :

$$\begin{cases} u(r, z) = \frac{5}{8}r, \\ w(r, z) = -\frac{5}{4}z. \end{cases} \quad (4.18)$$

D'autre part le développement limité à l'ordre 1 de l'équivalent (4.17) au voisinage de l'origine est donné par :

$$-\frac{2 \log(1 - \bar{r}^2)}{\bar{r}} = \frac{2}{\pi} \bar{r} + o(\bar{r}^2), \quad \bar{r} \rightarrow 0.$$

En remarquant que $\frac{5}{8} \simeq \frac{2}{\pi}$ (puisque $\pi \approx 16/5 = 3.2$, la valeur en artillerie), on comprends pourquoi (4.17) est une bonne approximation du comportement de la vitesse de glissement lorsque $r \rightarrow 0$. La figure 4.11 montre le bon accord qu'il existe entre la solution exacte et la solution approchée ainsi que pour leur développement au premier ordre au voisinage de l'origine.

4.2.5 Quantité de mouvement perdue lors de l'impact

La deuxième loi de Newton exprime le lien existant entre la variation de la quantité de mouvement \vec{p} d'un système et la somme des forces extérieures \vec{F}_i appliquées à celui-ci. Formellement le principe fondamental de la dynamique s'écrit $\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}$. Si on applique ce principe à notre problème et qu'on intègre cette relation sur la durée de l'impact τ nous pourrions en déduire la variation de quantité de mouvement au moment de l'impact. On a alors :

$$|\vec{p}_1 - \vec{p}_0| = \int_0^\tau \vec{F}(t) dt,$$

où \vec{p}_0 et \vec{p}_1 sont les quantités de mouvement de la goutte avant et après impact. D'autre part la somme des efforts \vec{F} appliqués au système au moment de l'impact correspondent à la force normale induite par la goutte qui est donnée par l'intégration de la pression sur le support solide. Par permutation des intégrations spatiale et temporelle on en déduit que la variation de quantité de mouvement verticale dépend directement de la pression impulsioneelle. On a alors l'équation scalaire suivante :

$$|p_1 - p_0| = \int_S \tilde{P}(r, \theta = \frac{\pi}{2}) dS,$$

avec $dS = r dr d\varphi$. L'équation (4.10) implique alors que la différence de quantité de mouvement verticale est donnée par :

$$\begin{aligned} |p_1 - p_0| &= \sum_{n=0}^{+\infty} A_{2n} P_{2n}(0) \int_S r^{2n+1} dr d\varphi \\ &= -\frac{\rho U_0 R}{R^{2n}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(4n+1)}{(2n-1)(2n+2)} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right)^2 \int_0^R r^{2n+1} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= -2\pi \rho U_0 R^3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(4n+1)}{(2n-1)(2n+2)^2} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right)^2 \\ &= \frac{2}{3} (3\pi - 8) \rho U_0 R^3. \end{aligned}$$

D'autre part la quantité de mouvement initiale est simplement $p_0 = \frac{2}{3}\pi \rho U_0 R^3$. Si un tel impact se produisait pour un solide la quantité de mouvement résultante p_1 serait nulle, ce qui n'est évidemment pas le cas ici puisque le fluide se met en mouvement immédiatement après l'impact. On a alors :

$$p_1 = \int_V \rho \vec{u} \cdot \vec{e}_z dV = \frac{2}{3} (8 - 2\pi) \rho U_0 R^3. \quad (4.19)$$

Ce résultat clôt l'étude aux temps courts du problème de Savart impulsioneel. Nous allons maintenant poursuivre avec une discussion sur les événements se produisant aux temps longs.

4.3 Etude post-impact

Dans cette partie nous allons donner quelques pistes de réflexions pour la suite de cette étude qui concerne l'évolution de la nappe liquide générée par l'impact du cylindre sur le substrat solide. Comme nous l'évoquions dans l'introduction de ce chapitre, le problème impulsioneel que nous proposons a des similitudes avec le problème de [Rozhkov et al. \(2002\)](#) et avec les nappes liquides de [Savart \(1833a\)](#). Nous allons donc passer

en revue quelques études relatives à ces problèmes de façon à dégager les problématiques importantes de cette expérience et si possible proposer quelques conjectures sur le comportement et la morphologie de la nappe liquide. Contrairement à ce qui a été fait jusqu'alors dans ce manuscrit, une approche expérimentale en complément des approches théoriques et numériques sera envisagée.

4.3.1 Effets visqueux

Bien que le point de vue impulsioneel que nous avons adopté jusqu'ici ne tienne pas compte des effets visqueux, il est tout de même clair que ceux-ci sont importants près de la paroi solide. Nous allons ici poser le problème de la couche limite et de son évolution après l'impact par l'intermédiaire de l'équation de von Kármán sans toutefois chercher à la résoudre ([Lagrée 2010](#)).

Comme rappelé dans le paragraphe [2.4.1](#), l'échelle transverse de la couche limite est d'ordre $\text{Re}^{-\frac{1}{2}}$ ce qui justifie la définition de la variable interne Z via la relation $z = \text{Re}^{-\frac{1}{2}} Z$. En désignant respectivement par U et W les vitesses radiales et verticales, l'équation de la couche limite adimensionnée est donnée par [Schlichting \(1968\)](#) :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial r} + W \frac{\partial U}{\partial Z} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2},$$

où la convention utilisée dans le paragraphe [2.4.1](#) relative aux lettres capitales représentant les quantités propres à la couche limite est conservée. L'équation d'Euler à l'extérieur de la couche limite nous permet de lier le gradient de pression à la vitesse de glissement u_e :

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial r}$$

En ajoutant l'équation de conservation de la masse on peut alors écrire les équations de la couche limite instationnaire axisymétrique sous la forme :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rU)}{\partial r} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0, \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial(U - u_e)}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial r} + W \frac{\partial U}{\partial Z} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2}, \quad (4.21)$$

auxquelles il faut ajouter les conditions aux limites :

$$U(r, Z = 0) = 0 \quad \text{et} \quad W(r, Z = 0) = 0, \quad (4.22)$$

et la condition de raccord :

$$U(r, Z \rightarrow \infty) = u_e. \quad (4.23)$$

On écrit ensuite l'équation de quantité de mouvement sous forme conservative en remplaçant le terme $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$ par $\text{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})$:

$$\frac{\partial(U - u_e)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rU^2)}{\partial r} + \frac{\partial(UW)}{\partial Z} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2}. \quad (4.24)$$

A partir d'ici l'idée est d'exprimer tous les termes du membre de gauche en fonction de $U - u_e$ ou $U^2 - u_e^2$. En remarquant tout d'abord que $\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_e^2)}{\partial r} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial r} + u_e \left(\frac{\partial u_e}{\partial r} + \frac{u_e}{r} \right)$ l'équation (4.24) peut être mise sous la forme :

$$\frac{\partial(U - u_e)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r(U^2 - u_e^2))}{\partial r} + u_e \left(\frac{\partial u_e}{\partial r} + \frac{u_e}{r} \right) + \frac{\partial(UW)}{\partial Z} = \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2}.$$

Pour le terme faisant intervenir la vitesse verticale W nous réécrivons l'équation de conservation de la masse de la façon suivante :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r(U - u_e))}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_e)}{\partial r} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0.$$

En multipliant cette dernière équation par u_e et en remarquant que :

$$\frac{u_e}{r} \frac{\partial(ru_e)}{\partial r} = u_e \left(\frac{\partial u_e}{\partial r} + \frac{u_e}{r} \right),$$

l'équation de conservation de la quantité de mouvement devient :

$$\frac{\partial(U - u_e)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r(U^2 - u_e^2))}{\partial r} - \frac{u_e}{r} \frac{\partial(r(U - u_e))}{\partial r} + \frac{\partial((U - u_e)W)}{\partial Z} = \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2}.$$

En utilisant l'identité $U^2 - u_e^2 = U(U - u_e) + u_e(U - u_e)$, l'équation de la couche limite s'écrit finalement :

$$\frac{\partial(U - u_e)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rU(U - u_e))}{\partial r} + \frac{\partial((U - u_e)W)}{\partial Z} = \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2}. \quad (4.25)$$

En intégrant par rapport à Z , l'équation (4.25) se réduit à :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{+\infty} (U - u_e) dZ + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \int_0^{+\infty} U(U - u_e) dZ \right) = - \frac{\partial U}{\partial Z} \Big|_{Z=0}, \quad (4.26)$$

puisque $U(r, Z) \rightarrow u_e$ lorsque $Z \rightarrow +\infty$ et $W = 0$ en $Z = 0$. On obtient ainsi l'équation intégrale de Von Kármán axisymétrique instationnaire :

$$\frac{\partial u_e \delta_1}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial r u_e^2 \delta_2}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial Z} \Big|_{Z=0}, \quad (4.27)$$

où δ_1 et δ_2 représentent respectivement l'épaisseur de déplacement et l'épaisseur de quantité de mouvement définies par (Schlichting 1968) :

$$u_e \delta_1 = \int_0^{+\infty} (u_e - U) dZ, \quad (4.28)$$

$$u_e^2 \delta_2 = \int_0^{+\infty} U(u_e - U) dZ. \quad (4.29)$$

Physiquement on peut voir l'épaisseur de déplacement comme étant la distance par laquelle les lignes de courant de l'écoulement potentiel externe à la couche limite sont déplacés compte tenu des effets de frictions près du mur. De même δ_2 permet de quantifier la perte de quantité de mouvement dans la couche limite.

L'équation de Von Kármán que nous présentons ici est à la base des méthodes intégrales comme par exemple la méthode de Pohlhausen qui permet d'obtenir à l'aide d'une approximation les épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement ainsi que la contrainte de cisaillement pariétale (Pohlhausen 1921; Schlichting 1968). La méthode repose sur l'hypothèse que la vitesse dans la couche limite a une expression simple, souvent un polynôme de degré 3 ou 4 dont les coefficients sont déterminés par identification à l'aide des conditions aux limites. Nous ne poursuivons pas plus loin l'étude des effets visqueux mais il pourrait être intéressant de commencer une étude de la couche limite par l'intermédiaire de cette méthode.

4.3.2 Etude de l'évolution de la nappe liquide

4.3.2.1 Détachement de la nappe liquide

Clanet (2001) a montré que pour qu'une cloche liquide puisse être formée, le ratio du diamètre de l'impacteur sur le diamètre du jet X devait être compris dans un certain intervalle dont les bornes dépendent des nombres de Weber et de Reynolds. Ce critère d'existence repose sur une étude du détachement de la nappe liquide. L'idée consiste à remarquer qu'à l'extrémité de l'impacteur la force d'inertie agit sur le film liquide de façon à favoriser son éjection alors que l'action de la tension de surface tend au contraire à le garder attaché. Clanet en déduit que le film se détache lorsque la force d'inertie est supérieure à la force capillaire. Afin de mieux quantifier le flux de quantité de mouvement au bord de l'impacteur qui est une donnée importante pour l'alimentation



FIGURE 4.12 – Figure 3a de [Vernay et al. \(2015\)](#) représentant une goutte avant et après l’impact sur une cible de diamètre légèrement plus grand. Une nappe liquide se forme et commence ensuite à s’étendre. La configuration qui nous intéresse est différente puisque la ligne de contact est accrochée au support solide avant l’impact (voir les Fig. 4.3 et 4.4). Les conditions initiales sont par conséquent différentes.

de la nappe liquide, une étude de l’étalement radial du jet le long du disque est réalisée en s’appuyant sur l’étude de [Watson \(1964\)](#). Les caractéristiques de cet écoulement à savoir la vitesse, l’épaisseur du film et l’épaisseur de la couche limite ainsi que le flux de quantités de mouvement sont déterminés. En faisant une analyse des différentes limites, [Clanet](#) déduit que le film liquide se détache de l’impacteur lorsque $X \in]X_-, X_+[$ où X_- et X_+ se déduisent des relations suivantes :

$$X_- = \frac{62}{We}, \quad (4.30)$$

$$17.6 \frac{X_+}{Re^{\frac{1}{3}}} \left[1 + 3.51 \left(\frac{X_+}{Re^{\frac{1}{3}}} \right)^3 \right] = \frac{We}{Re^{\frac{1}{3}}}. \quad (4.31)$$

En s’inspirant de cette démarche un critère pourrait être produit dans notre cas pour différencier les deux régimes que nous avons mis en évidence dans l’introduction de ce chapitre. En effet nous avons vu que pour les nombres de Weber de l’ordre de l’unité il n’y a pas de formation de cloche liquide. En revanche la goutte peut se déformer de façon à former une cavité et produire par la suite un jet lors de la relaxation de celle-ci (Fig. 4.3). Dans toute la suite nous ne considérons que le régime pour lequel une cloche liquide est clairement formée.

4.3.2.2 Une nappe liquide pas comme les autres

Dans l’introduction de ce chapitre nous avons vu que lorsque la vitesse d’impact est suffisante une cloche liquide se forme immédiatement après le contact du cylindre avec le substrat solide (voir Fig. 4.4). Bien que l’analogie avec les cloches liquides de [Savart \(1833a\)](#) soit évidente, il y a tout de même quelques différences majeures. Tout d’abord, le problème étudié par [Savart](#) et ses successeurs ([Boussinesq 1869a](#); [Taylor et Howarth 1959](#); [Clanet 2001](#); [Brunet et al. 2004](#)) est stationnaire puisqu’un jet continu alimente la cloche liquide. Donc après un bref transitoire et lorsque les conditions de son existence sont réunies ([Clanet 2001](#)), la cloche liquide atteint une forme d’équilibre. Dans notre

configuration le problème est clairement instationnaire et lorsque la tension de surface prend le dessus sur l'inertie la nappe liquide se rétracte. L'alimentation de la nappe liquide est la seconde différence fondamentale entre les cloches liquides impulsioneelles et le problème de [Savart \(1833a\)](#). En effet dans notre cas le volume de fluide mis en jeu dans le problème est fixé dès le début par la taille de la goutte. Au moment de l'impact celle-ci vient d'une certaine façon se vidanger un peu à la façon d'un *jet de décharge* qui voit son alimentation diminuer par la réduction de la réserve d'énergie qui a contribué à sa création. Nous avons par ailleurs déjà rencontré un jet de cette nature au début de ce chapitre (voir le paragraphe 4.1.1) avec l'étude de [Antkowiak et al. \(2007\)](#). En réalité on retrouve ce type de phénomène dans de nombreuses situations comme par exemple lorsqu'à l'aide d'une impulsion générée par de l'air comprimé on vient creuser une cavité à la surface d'un bain liquide qui en se relaxant va former un jet ([Ghabache et al. 2014](#)).

D'autre part il y a également une différence majeure entre le problème de [Rozhkov et al.](#) et le problème que nous avons posé dans ce chapitre. En effet dans la configuration originale la goutte s'écrase dans un premier temps sur un impacteur de même diamètre ([Villermaux et Bossa 2011](#); [Rozhkov et al. 2002](#)) ou de diamètre légèrement plus grand que celle-ci ([Rozhkov et al. 2002](#); [Vernay et al. 2015](#)). Aux temps courts la physique correspond à ce que nous présenté au chapitre 2. La goutte vient ensuite former une nappe liquide qui s'étale sur l'impacteur avant de poursuivre sa course à l'air libre comme suggéré par la figure 4.12. D'une certaine façon l'impacteur agit comme une rampe de lancement pour la nappe liquide. [Villermaux et Bossa \(2011\)](#) expliquent par ailleurs que le temps (convectif) pendant lequel la goutte s'écrase est petit devant la durée de variation du rayon de la nappe liquide ce qui leur permet de découpler la dynamique aux instants primordiaux de l'impact de la dynamique de la nappe. La configuration qui nous intéresse est assez différente de ce point de vue puisque la goutte et le support cylindrique ont même diamètre ce qui implique que la ligne de contact est accrochée au bord du cylindre. Cette distinction de nature géométrique implique que les conditions initiales des deux problèmes diffèrent assez fortement notamment en ce qui concerne la formation de la nappe liquide qui dans notre cas est induite par une déformation de l'interface au voisinage de la ligne de contact. La nappe est ensuite alimentée par l'écoulement de point d'arrêt et se développe à l'air libre formant ainsi une cloche liquide ouverte.

4.3.2.3 Angle d'éjection

Lorsqu' une cloche liquide est créée, nous avons vu que la nappe liquide est ejectée avec un certain angle par rapport à la verticale. Cet angle est appelé angle d'éjection et est noté ψ_0 comme nous l'évoquons dans l'introduction de ce chapitre avec la figure 4.6. A l'aide de nombreuses expériences [Clanet \(2001\)](#) a pu dans un premier temps montrer que

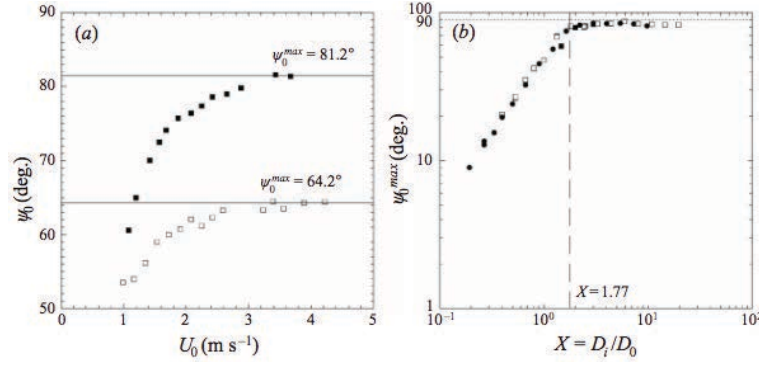


FIGURE 4.13 – Gauche : Figure 11a de [Clanet \(2007\)](#) représentant l'angle d'éjection ψ_0 en fonction de la vitesse pour deux valeurs de X différentes. La valeur limite de ψ_0 est noté ψ_0^{\max} . Droite : Figure 11b de [Clanet \(2007\)](#) représentant l'évolution de ψ_0^{\max} obtenu pour des vitesses importantes en fonction de X . Dans toutes ces expériences le diamètre de l'impacteur est fixé et la valeur de X est modifiée en faisant varier le diamètre du jet.

cet angle dépend de la vitesse du jet U_0 et du ratio X que nous avons défini précédemment (Fig. 4.13). Au-delà d'une vitesse critique, ψ_0 converge vers une valeur limite appelée ψ_0^{\max} qui ne dépend que du ratio X . Cet angle limite croît linéairement tant que $X < 1.77$ et sature à $84^\circ - 85^\circ$ sinon. A l'aide d'un équilibre des forces verticales s'appliquant sur la nappe liquide au voisinage du bord de l'impacteur [Clanet](#) est parvenu à montrer que dans la limite non visqueuse l'angle d'éjection vérifie l'équation non linéaire suivante pour des nombres de Weber modérés :

$$\cos(\psi_0) - \cos(\psi_0^{\max}) = \frac{8X}{We} \sin(\psi_0). \quad (4.32)$$

Cependant cette équation n'est valable que si l'épaisseur de la nappe liquide au bord de l'impacteur est très petite devant son rayon. Lorsque le nombre de Weber est très grand devant l'unité, l'auteur déduit que l'angle d'éjection maximal ψ_0^{\max} est donné par :

$$1 - \cos(\psi_0^{\max}) = C_1 X^2 \quad \text{pour } X < 1, \quad (4.33)$$

$$1 - \cos(\psi_0^{\max}) = C_2, \quad \text{pour } X > 1, \quad (4.34)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes déterminées expérimentalement.

Les conditions d'éjection de la nappe liquide pour les cloches liquides impulsives et pour le problème original sont très différentes. On peut donc s'attendre à ce que les angles d'éjection, qui sont représentatifs de l'équilibre de la nappe au voisinage de l'extrémité de l'impacteur, soient différents. Une étude expérimentale plus poussée et couplée à des arguments théoriques proches de ceux qui viennent d'être exposés est envisagée pour pouvoir quantifier cette différence. On peut cependant dans un premier temps comparer les expériences de [Clanet \(2001\)](#) et une simulation numérique réalisée

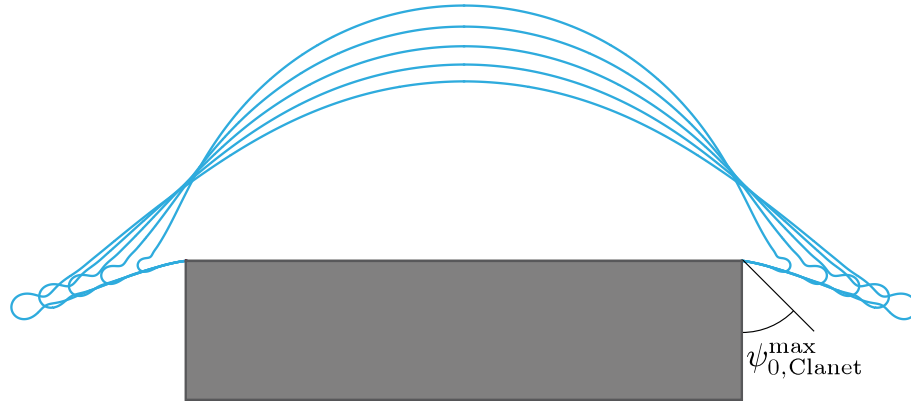


FIGURE 4.14 – Représentation de l'interface d'une cloche liquide simulée à l'aide de *Gerris* pour des temps adimensionnés \bar{t} allant de 0,1 à 0,5. Le nombre de Reynolds est de 2000 et le nombre de Weber est de 250. A titre de comparaison il est représenté l'angle d'éjection maximal déduit de [Clanet \(2001\)](#) qu'aurait une cloche liquide générée par un jet pour le même ratio de diamètres $X = 1$. On constate que l'angle de la cloche liquide impulsioneelle est bien plus grand.

avec *Gerris*. Si on se réfère à la figure 4.13 gauche lorsque $X = 1$, c'est à dire lorsque le diamètre du jet est égal au diamètre de l'impacteur, l'angle d'éjection maximal est de l'ordre de 45° . On constate alors avec la figure 4.14 que ψ_0 est bien plus grand dans notre cas. Une étude plus systématique peut être menée également avec *Gerris* dans l'esprit des chapitres précédent. De cette façon nous pourrions avoir une étude très complète de ce phénomène.

4.3.2.4 Caractéristiques géométriques de la cloche liquide

Les caractéristiques géométriques de la cloche liquide telles que sa forme par exemple sont également des inconnues de ce problème. Afin d'en apprendre plus sur ces aspects là, une étude à la fois théorique, numérique et expérimentale est envisageable.

Dans le cas des nappes de [Savart](#) la forme de la cloche liquide dans son état stationnaire a été déterminée de manière théorique par [Boussinesq \(1869a,b\)](#) en équilibrant les effets de la tension de surface, de la gravité et de l'inertie. [Boussinesq](#) a notamment montré que dans la limite où les effets de la gravité peuvent être considérés comme négligeables devant les deux autres contributions la cloche liquide a la forme d'une chaînette. Ces travaux ont notamment été prolongés par [Lance et Perry \(1953\)](#) et [Taylor et Howarth \(1959\)](#). L'idée, également reprise par [Clanet \(2001, 2007\)](#), est de modéliser la cloche liquide comme représenté sur la figure 4.15 gauche où l'angle que fait la cloche avec la verticale pour un certaine abscisse curviligne s est désigné par $\psi(s)$. A l'aide des principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement appliqués à un tronçon de nappe liquide d'épaisseur $h(s)$ (Fig. 4.15 droite), on peut en déduire le système

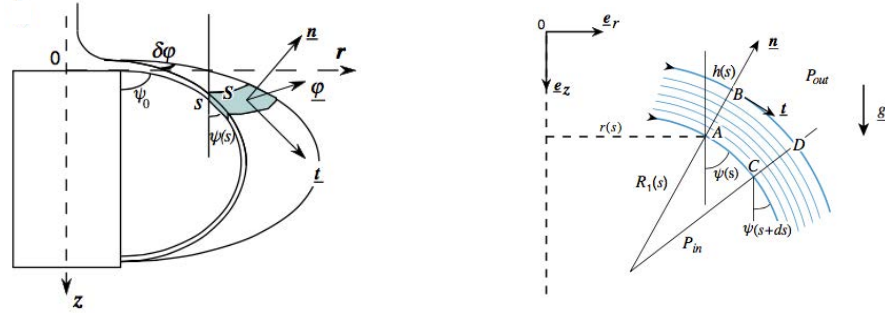


FIGURE 4.15 – Gauche : Schéma et notations utilisés pour modéliser la forme de la cloche liquide (Figure 5b de [Clanet \(2007\)](#)). Droite : Figure 7 de [Clanet \(2007\)](#) représentant un tronçon de la nappe ainsi que les notations utilisées pour dériver la forme de la cloche liquide par l'intégration des équations d'Euler.

d'équations qui détermine la forme de la cloche :

$$\bar{u}^2 = \bar{u}_e^2 + 2\beta\bar{z}, \quad (4.35)$$

$$(\bar{u} - \bar{r}) \frac{\partial \psi}{\partial \bar{s}} = -\cos(\psi) - \beta \frac{\sin(\psi)}{\bar{u}}, \quad (4.36)$$

où $\bar{u}(s)$ est la vitesse dans la nappe liquide, \bar{u}_e est la vitesse d'injection à l'extrémité de l'impacteur et $\beta = \frac{gL}{U_0^2}$ un coefficient qui permet de mesurer les effets de la gravité. Dans ces équations les vitesses et les longueurs sont respectivement adimensionnées par U_0 et $L = \frac{WeD_0}{16}$. Les équations tiennent normalement compte de la différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur de la cloche mais dans notre cas ce terme est identiquement nul puisque la cloche est ouverte. Le pendant non stationnaire de ce modèle pourrait être utilisé pour déterminer l'équation d'évolution des cloches liquide impulsives. Il faudra cependant prendre garde à la vitesse d'injection \bar{u}_e qui dans notre cas sera différente. Il faudra alors bien comprendre la façon dont la nappe est éjectée au moment de l'impact. L'outil numérique peut être un allié puissant pour réussir à bien comprendre la façon dont le liquide se met en mouvement dans cette zone très particulière.

4.3.2.5 Epaisseur de la cloche liquide et écoulement au sein de la nappe

Dans la version originale du problème qui nous occupe, [Rozhkov et al. \(2002, 2004\)](#) ou encore [Villermaux et Bossa \(2011\)](#) se sont intéressés à l'évolution de l'épaisseur de la nappe liquide ainsi qu'à son champ de vitesse radiale. Les modèles théoriques proposés dans ces études pour en décrire l'hydrodynamique ont conduit à une prédiction identique pour la vitesse radiale $u(r, t)$ mais sont en désaccord pour l'expression de l'épaisseur $h(r, t)$ et du diamètre du film $d(r, t)$. Les deux approches sont basées sur la résolution des équations d'Euler axisymétriques en supposant que $|\partial_r h(r, t)| \ll 1$ (*slender-slope*

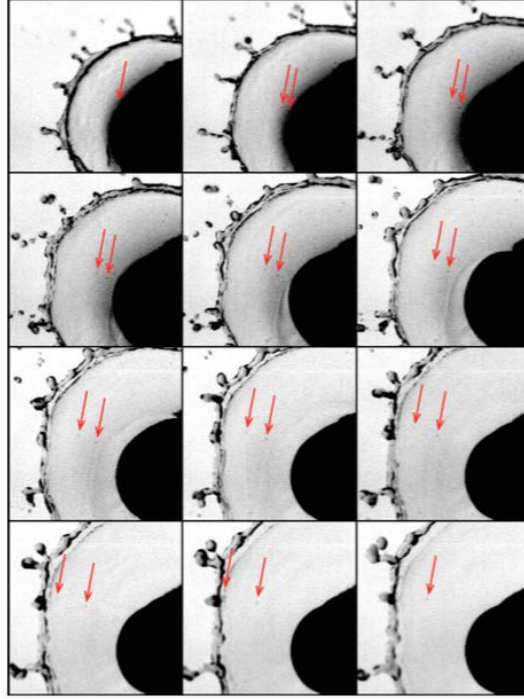


FIGURE 4.16 – Figure 4a de Villiermaux et Bossa (2011) représentant une expérience mettant en évidence la dépendance radiale de la vitesse $u(r, t)$ par l'intermédiaire du suivi de deux particules dans la nappe liquide. Initialement très proches, la distance séparant les particules le long du rayon de la nappe devient de plus en plus grande au fur et à mesure que le temps passe. Le nombre de Weber pour cet impact est de 800 et l'intervalle de temps entre chaque images est de $2/3500$ secondes.

approximation) mais décrivent deux limites différentes. Rozhkov *et al.* ne traitent le problème que pour des temps petits comparés au temps convectif de la collision $\tau_{coll} = d_0/u_0$ alors que Villiermaux et Bossa considèrent les échelles de temps plus grandes. Plus précisément le comportement asymptotique valable aux temps courts ($t < 3\tau_{coll}$) mis en évidence par Rozhkov *et al.* implique que $u(r, t) \propto r/t$ et $h(r, t) \propto t/r^3$ alors que Villiermaux et Bossa en considérant l'autre limite $t \gg \tau_{coll}$ obtiennent $u(r, t) \propto r/t$ et $h(r, t) \propto 1/rt$.

La dépendance radiale de la vitesse $u(r, t)$ a été mis en évidence par Villiermaux et Bossa grâce au principe du traceur passif en plaçant des particules dans la goutte avant l'impact. Lors du développement de la nappe liquide, les auteurs ont pu constater que deux particules initialement très proches voient la distance les séparant devenir de plus en plus importante au fur et à mesure que le temps passe (Fig. 4.16). L'épaisseur de la nappe liquide n'a en revanche pu être mesurée expérimentalement que récemment avec l'étude de Vernay *et al.* (2015) à l'aide d'une méthode optique basée sur l'absorption de la lumière par un colorant. Vernay *et al.* montrent grâce à cette méthode que l'épaisseur de la nappe liquide atteint un maximum $h_{max}(r)$ pour un rayon donné au temps $t_{h_{max}}$ correspondant à la transition entre chacun des deux régimes prédit par Rozhkov *et al.* et

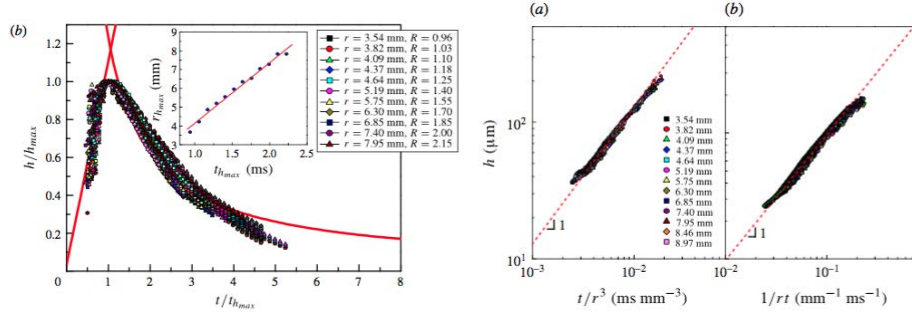


FIGURE 4.17 – Gauche : Figure 5b de Vernay *et al.* (2015) représentant pour différents rayons l'épaisseur de la nappe liquide en fonction du temps, adimensionnés respectivement par l'épaisseur maximale h_{max} de la nappe et par le temps pour lequel l'épaisseur est maximale $t_{h_{max}}$. Les courbes se superposent et on constate un bon accord avec chacun des comportements asymptotiques prédit par Rozhkov *et al.* et Villiermaux et Bossa. Droite : Représentation des mêmes données expérimentales que pour la figure de gauche. L'épaisseur de la nappe liquide est représentée en fonction de t/r^3 lorsque $t < t_{h_{max}}$ pour la courbe (a) et en fonction de $1/rt$ lorsque $t > t_{h_{max}}$ pour la courbe (b). On constate un excellent accord avec chacun de ces régimes.

Villiermaux et Bossa (Fig. 4.17 gauche). En représentant l'épaisseur de la nappe liquide au cours du temps pour plusieurs rayons et en la comparant avec t/r^3 lorsque $t < t_{h_{max}}$ et avec $1/rt$ lorsque $t > t_{h_{max}}$, les expériences de Vernay *et al.* montrent un excellent accord avec les prédictions théoriques (Fig. 4.17 droite).

Il pourrait être très intéressant de voir si les résultats présentés ici sont toujours valables pour les cloches liquides impulsionnelles en adaptant le raisonnement théorique et en reproduisant les expériences de Villiermaux et Bossa (2011) et Vernay *et al.* (2015).

4.4 Conclusion

Nous avons proposé dans ce chapitre de revisiter le problème de (Rozhkov *et al.* 2002, 2004) du point de vue impulsionnel par analogie avec les problèmes d'impact. L'expérience que nous avons proposé consiste à poser une goutte sur un support cylindrique de même rayon et à laisser tomber verticalement le cylindre.

Au moment de l'impact, la goutte subit une variation brutale d'accélération à sa base que nous appelons ici impulsion. En utilisant le concept de pression impulsionnelle (Bagnold 1939; Batchelor 1967), nous avons déterminé la structure de l'écoulement et le champ de pression dans la goutte au moment de l'impact. En particulier nous avons pu obtenir la vitesse de glissement et montrer que celle-ci diverge logarithmiquement au niveau de la ligne de contact.

Immédiatement après l'impact la goutte se déforme et une nappe liquide se développe à l'air libre formant ainsi une cloche liquide ouverte que nous avons appelé *cloche liquide*

impulsionnelle. Une telle morphologie rappelle inévitablement les cloches liquides de [Savart \(1833a\)](#) issues de l'impact d'un jet à vitesse constante sur une cible circulaire de taille comparable au jet. Les caractéristiques de la nappe dépendent notamment de la vitesse du jet et du ratio entre le diamètre de l'impacteur et le diamètre du jet. Nous avons alors proposé dans la seconde partie de ce chapitre une série de questions concernant les cloches liquide impulsionnelles par analogie avec le problème de [Rozhkov et al.](#) et les cloches liquides de [Savart](#). Lorsque cela était possible nous avons conjecturé le comportement des cloches liquides impulsionnelles.

Cette étude pourra être prolongée à l'avenir pour tenter de répondre aux différentes questions que nous avons posées dans ce chapitre grâce à une approche aussi bien théorique que numérique et expérimentale.

Chapitre 5

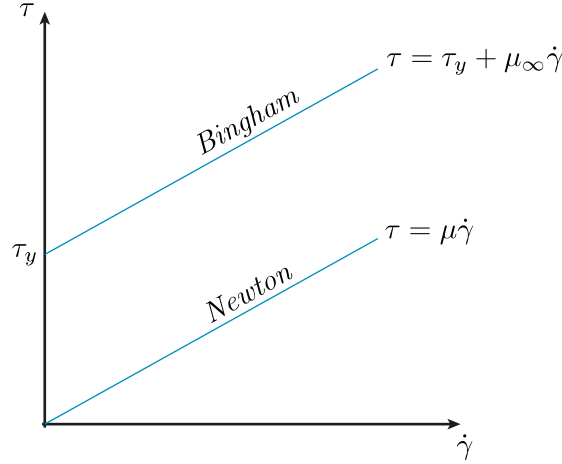
Brève introduction aux impacts de gouttes pour des fluides viscoplastiques

En collaboration avec les professeurs Ian Frigaard et Neil Balmforth de University of British Columbia (Vancouver).

5.1 Introduction

5.1.1 Généralités sur les fluides viscoplastiques

En dehors de quelques exemples particuliers cités dans l'introduction du présent manuscrit, nous n'avons considéré jusqu'ici que des problèmes mettant en jeu des fluides newtoniens tels que l'eau par exemple. Il existe cependant dans la nature ou dans la vie quotidienne des liquides qui ont des comportements différents mettant en défaut l'intuition. Nous allons nous intéresser dans ce court chapitre à une classe particulière de fluides aux comportements étranges : les fluides viscoplastiques ou fluides à seuil (*yield stress fluids* en anglais). Ces fluides, également appelés *fluides de Bingham*, ont la particularité de se comporter comme un solide tant que la contrainte qui leur est appliquée ne dépasse pas une valeur seuil. En revanche lorsque cette valeur seuil est dépassée, le liquide s'écoule comme un fluide classique ([Bingham 1916, 1922](#); [Balmforth et al. 2014](#)). Bien qu'à première vue ce type de comportement puisse paraître étonnant, nous connaissons en réalité de nombreux fluides se comportant de cette façon comme par exemple le dentifrice, la mayonnaise, la peinture ou encore les boues de forage.

FIGURE 5.1 – Lois constitutives $\tau = f(\dot{\gamma})$ pour des fluides de Bingham et de Newton.

Contrairement aux fluides newtoniens, la viscosité des fluides de Bingham n'est pas une propriété intrinsèque du fluide mais une quantité qui varie en fonction de l'écoulement. Pour tenir compte de cette particularité il est nécessaire de modifier la loi constitutive du fluide c'est à dire la relation liant la contrainte et les taux de déformation. Pour les fluides newtoniens cette loi est donnée par une relation linéaire entre la contrainte de cisaillement $\underline{\underline{\tau}}$ et le taux de déformation $\underline{\underline{\dot{\gamma}}}$:

$$\underline{\underline{\tau}} = \mu \underline{\underline{\dot{\gamma}}}, \quad (5.1)$$

où μ est la viscosité du liquide et $\underline{\underline{\dot{\gamma}}}$ est le tenseur dont les composantes sont définies par $\dot{\gamma}_{ij} = 2D_{ij}$, avec $\underline{\underline{D}}$ le tenseur des taux de déformation. Pour un fluide de Bingham la relation constitutive donnant $\underline{\underline{\tau}}$ devient :

$$\begin{cases} \tau_{ij} = \left(\mu_{\infty} + \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} \right) \dot{\gamma}_{ij} = \eta(\dot{\gamma}) \dot{\gamma}_{ij} & \text{si } \tau > \tau_y, \\ \dot{\gamma}_{ij} = 0 & \text{si } \tau \leq \tau_y, \end{cases} \quad (5.2)$$

où τ_y est la contrainte seuil, μ_{∞} est la viscosité à cisaillement infini alors que $\dot{\gamma}$ et τ sont les seconds invariants des tenseurs $\underline{\underline{\dot{\gamma}}}$ et $\underline{\underline{\tau}}$ définis par :

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2} \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ij}} \quad \text{et} \quad \tau = \sqrt{\frac{1}{2} \tau_{ij} \tau_{ij}}. \quad (5.3)$$

Avec ce modèle la viscosité équivalente $\eta(\dot{\gamma})$ dépend bien de la nature de l'écoulement. De plus $\dot{\gamma}$ s'annule lorsque la contrainte atteint la contrainte seuil. Par conséquent la viscosité équivalente est bien infinie à taux de cisaillement nul.

Par ailleurs l'équation (5.2) peut être réécrite avec les seconds invariants des tenseurs $\underline{\underline{\dot{\gamma}}}$ et $\underline{\underline{\tau}}$ en calculant $\tau_{ij}\tau_{ij}$. Ainsi la loi constitutive devient la relation non linéaire suivante

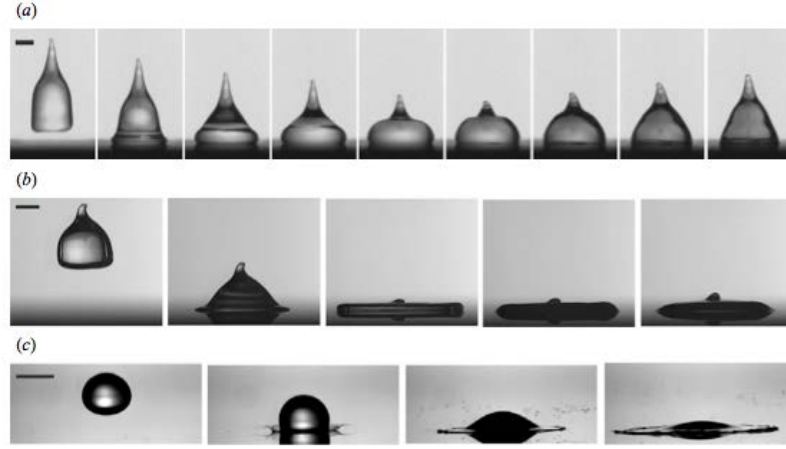


FIGURE 5.2 – Figure 3 de [Luu et Forterre \(2009\)](#) représentant l'impact de gouttes de Carbopol sur une lame de verre. La vitesse d'impact et le pourcentage massique sont respectivement de 0.5 m.s^{-1} et 1 %, 2.1 m.s^{-1} et 1 %, 4.3 m.s^{-1} et 0.2%. Ces expériences permettent de voir les effets relatifs de la concentration en Carbopol et de l'inertie sur le comportement de la goutte. On constate par exemple qu'en faisant varier de manière appropriée ces deux paramètres on peut observer une transition entre un étalement classique et un impact avec une déformation radiale quasi-nulle.

pour $\tau > \tau_y$:

$$\tau = \tau_y + \mu_\infty \dot{\gamma}, \quad (5.4)$$

ce qui permet de visualiser de manière plus claire cette notion de contrainte seuil (Fig. 5.1).

La surface séparant la zone plastique de la zone fluide est appelée *surface de plasticité* (*yield surface* en anglais). Dans le cas général la position de cette surface, qui dans un problème axisymétrique est donnée par $z = Y(r, t)$, est une inconnue du problème. Sauf dans de rares cas particuliers, il est extrêmement difficile de déterminer cette dernière analytiquement. Le recours à l'outil numérique est alors indispensable et plusieurs méthodes, plus ou moins efficaces, existent comme la méthode de régularisation de la viscosité ou la méthode du lagrangien augmenté ([Fortin et Glowinski 1983](#); [Allouche et al. 2000](#); [Putz et al. 2009](#)).

5.1.2 Impact de gouttes

L'étude de l'impact de goutte pour les fluides à seuil est relativement récente. Une des premières études expérimentales sur le sujet a été réalisée par [Nigen \(2005\)](#) qui a montré que la contrainte seuil peut supprimer la rétraction capillaire et figer la goutte lorsque son rayon maximal est atteint. Ce premier résultat suggère que certaines phases de l'impact peuvent être contrôlées par la rhéologie plutôt que par les propriétés de mouillage de la

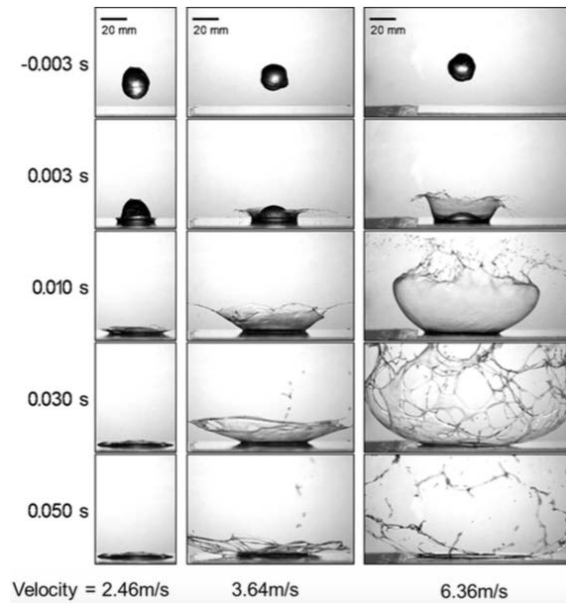


FIGURE 5.3 – Figure 8 de [Blackwell et al. \(2015\)](#) représentant l’impact de gouttes de Carbopol sur une couche mince du même liquide. La vitesse d’impact est augmentée de manière progressive mettant en évidence le rôle fondamental de la vitesse dans la transition entre le *sticking* et le *splashing*. Dans ce dernier cas, il n’est pas rare d’observer la rupture de la nappe liquide, qui, en se déstabilisant, va engendrer des ligaments plutôt que des gouttes puisque les effets capillaires sont dominés par les effets non-newtoniens.

surface sur laquelle la goutte impacte. Une étude expérimentale beaucoup plus complète a été réalisée par [Luu et Forterre \(2009\)](#) à l’aide de différents types de fluides à seuil et pour des surfaces de mouillabilité différentes. Ces auteurs ont pu ainsi mettre en évidence plusieurs régimes d’impact allant de l’étalement irréversible (voir Fig. 5.2) au rebond de la goutte. Dans ces expériences la forme et la taille des gouttes ne sont pas seulement contrôlées par la tension de surface mais sont données par un équilibre complexe entre la gravité, la contrainte seuil et la vitesse d’extrusion de la seringue de laquelle elles proviennent, ce qui explique leur forme de bouteille sur la figure 5.2. A notre connaissance il s’agit également de la première étude où un modèle simple est proposé pour décrire la phase d’étalement tenant compte d’effets elasto-visco-plastique. Par ailleurs une étude numérique des paramètres physiques gouvernant les différentes étapes de l’impact a été proposée par [Kim et Baek \(2012\)](#).

Les études d’impact de gouttes de fluides à seuil sur surface liquide sont encore plus rares. Récemment [Blackwell et al. \(2015\)](#) se sont intéressés à l’impact sur film mince (avec des épaisseurs variant de 0,15 mm à quelques millimètres). En faisant varier le pourcentage massique de Carbopol dans l’eau, la taille initiale de la goutte, la vitesse d’impact et l’épaisseur du film liquide, les auteurs ont mis en évidence une transition allant du *sticking*, correspondant à un événement où la nappe liquide vient se déposer sur le film fin après sa formation, jusqu’au *splashing* en passant par tout une série de comportements

intermédiaires. L'influence de chaque paramètre sur le comportement aux temps longs est déterminé qualitativement de manière systématique (voir par exemple la figure 5.3 représentant l'influence de la vitesse initiale). De manière à comprendre la transition observée entre le *sticking* et le *splashing*, Blackwell *et al.* montrent que le problème est régi par un équilibre entre les efforts inertiels et les efforts dissipatifs de l'écoulement à savoir les efforts induits par les effets non-newtoniens et les effets visqueux. Ce raisonnement leur permet d'obtenir un diagramme de phase en accord raisonnable avec l'expérience.

Nous allons dans la suite de ce chapitre proposer une étude préliminaire pour l'impact de goutte pour des fluides à seuil basée sur des expériences numériques de façon à proposer quelques directions de recherche que nous pourrions explorer ultérieurement.

5.2 Modélisation basique du problème

5.2.1 Conservation de la quantité de mouvement

Dans ce chapitre nous considérons comme précédemment une goutte de rayon initial R impactant un solide indéformable à la vitesse U . Le liquide dont la goutte est constitué est un fluide de Bingham de viscosité à cisaillement infini μ_∞ et de contrainte seuil τ_y vérifiant la loi constitutive (5.2). Pour tenir compte de cette dernière il est nécessaire d'écrire l'équation de la quantité de mouvement dans le cas général :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{\tau}} + \rho \vec{g} + \gamma \kappa \delta_S \vec{n}. \quad (5.5)$$

Par conséquent l'adimensionnement du problème doit être adaptée à la loi constitutive. Pour cela on introduit les quantités suivantes :

$$\underline{\underline{\tau}} = \rho U^2 \bar{\underline{\underline{\tau}}}, \quad \dot{\gamma}_{ij} = \frac{U}{R} \bar{\dot{\gamma}}_{ij}, \quad (5.6)$$

ce qui permet de réécrire cette loi lorsque $\tau > \tau_y$:

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \rho U^2 \left(\frac{\mu_\infty}{\rho U^2} + \frac{\tau_y}{\rho U^2} \frac{1}{\dot{\gamma}} \right) \dot{\gamma}_{ij} \\ &= \rho U^2 \left(\frac{\mu_\infty}{\rho U R} + \frac{\tau_y}{\rho U^2} \frac{1}{\bar{\dot{\gamma}}} \right) \bar{\dot{\gamma}}_{ij} \\ &= \rho U^2 \left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{B}{\bar{\dot{\gamma}}} \right) \bar{\dot{\gamma}}_{ij}, \end{aligned}$$

où $\text{Re} = \frac{\rho U R}{\mu_\infty}$ est le nombre de Reynolds construit à partir de la viscosité à cisaillement infini et $B = \frac{\tau_y}{\rho U^2}$ est un nombre de Bingham représentant le ratio entre la contrainte seuil et l'inertie. Finalement la version adimensionnée de la loi constitutive est donnée

par :

$$\bar{\tau}_{ij} = \left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{B}{\bar{\gamma}} \right) \bar{\gamma}_{ij} = \bar{\eta}(\bar{\gamma}) \bar{\gamma}_{ij}. \quad (5.7)$$

Pour le reste, en conservant les mêmes variables d'adimensionnement qu'au chapitre 1, l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit donc :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \bar{t}} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\vec{\nabla} \bar{p} + \vec{\nabla} \cdot \left[\left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{B}{\bar{\gamma}} \right) \bar{\gamma}_{ij} \right] - \frac{1}{\text{Fr}} \vec{e}_z + \frac{1}{\text{We}} \bar{\kappa} \bar{\delta}_S \vec{n}. \quad (5.8)$$

A partir de cette nouvelle équation nous pouvons discuter de la validité du modèle aux temps courts que nous avons présenté au chapitre 2.

5.2.2 Discussion sur la validité de la théorie wagnérienne de l'impact de goutte

La théorie aux temps courts que nous avons présenté au chapitre 2 n'est valable que pour des impacts où l'inertie est l'effet dominant. Autrement dit, les nombres de Reynolds, Weber et Froude doivent être grands devant l'unité. Nous nous plaçons par conséquent dans le cadre d'une théorie non visqueuse et donc indépendante de la rhéologie.

En considérant un fluide à seuil, nous venons de montrer que le tenseur des contraintes visqueuses a un terme supplémentaire qui dépend du nombre de Bingham. On en déduit alors grâce à l'équation (5.8) que lorsque ce nombre est très petit devant l'unité, l'impact est dominé par l'inertie également au sens de Bingham et la théorie de Wagner telle que nous l'avons présentée reste valable. Il est possible de raffiner encore un peu le critère de validité en considérant les changements d'échelles spatiales et temporelles que nous avons utilisés pour les temps courts à savoir (voir le tableau 2.1) :

$$\vec{u} = \vec{\tilde{u}}, \quad \vec{\nabla} = \frac{1}{\varepsilon} \vec{\tilde{\nabla}}, \quad \bar{t} = \varepsilon^2 \tilde{t}, \quad \bar{p} = \frac{1}{\varepsilon} \tilde{p}, \quad (5.9)$$

auxquels il faut ajouter $\dot{\bar{\gamma}}_{ij} = \frac{1}{\varepsilon} \dot{\tilde{\gamma}}_{ij}$. En considérant que les nombres de Weber et de Froude sont très grand devant l'unité, l'équation (5.8) devient alors :

$$\frac{\partial \vec{\tilde{u}}}{\partial \tilde{t}} + \varepsilon \left(\vec{\tilde{u}} \cdot \vec{\tilde{\nabla}} \right) \vec{\tilde{u}} = -\vec{\tilde{\nabla}} \tilde{p} + \vec{\tilde{\nabla}} \cdot \left[\left(\frac{1}{\text{Re}} + \varepsilon \frac{B}{\tilde{\gamma}} \right) \tilde{\gamma}_{ij} \right], \quad (5.10)$$

ce qui montre que pour de grands nombre de Reynolds notre théorie wagnérienne aux temps courts est valable pour $B = \mathcal{O}(1)$. Cependant pour cette gamme de nombre de Bingham, le comportement aux temps intermédiaires et aux temps longs va être très différents de ce qu'on peut observer dans le cas newtonien. Comme le montrent par

exemple les expériences de [Luu et Forterre \(2009\)](#), la rhéologie va avoir entre autres une influence sur le diamètre maximal atteint.

Lorsque le nombre de Bingham devient grand devant l'unité, la théorie de Wagner ne s'applique clairement plus et un nouveau modèle est à trouver pour toutes les phases de l'impact. On remarque que la limite $B \rightarrow \infty$ correspond à l'impact d'un solide incompressible où la solution est donnée par le contact de Hertz. On peut alors voir l'impact de goutte pour un fluide viscoplastique comme un cas intermédiaire entre le cas newtonien correspondant à $B = 0$ et le cas du solide incompressible.

5.3 Influence du nombre de Bingham

5.3.1 Expériences numériques

Nous utilisons ici de nouveau l'idée d'expérience numérique afin de proposer quelques pistes de réflexion sur les impacts de goutte pour des fluides à seuil. Nous nous intéressons en particulier à l'influence du nombre de Bingham sur l'écoulement ou sur le comportement aux temps longs d'une goutte impactant une surface solide. Nous utilisons comme pour les chapitres précédents le solveur des équations de Navier-Stokes *Gerris* ([Popinet 2003, 2009](#)) pour lequel il est possible de modifier la rhéologie de façon à simuler l'évolution d'un fluide de Bingham. Il suffit pour cela de modifier la viscosité afin que celle-ci correspondent à la forme des contraintes visqueuses de l'équation (5.8). Cependant comme théoriquement la viscosité diverge à partir de la surface de plasticité, autrement dit dès lors que $\bar{\gamma} = 0$, il est nécessaire de régulariser numériquement ce terme. Il existe de nombreux critères de régularisation consistant à proposer une viscosité $\bar{\eta}_\varepsilon(\bar{\gamma})$, pour un certain ε arbitrairement aussi petit que l'on souhaite, qui soit définie lorsque $\bar{\gamma}$ tend vers zéro. Une viscosité régularisée qui convient est par exemple donnée par :

$$\bar{\eta}_\varepsilon(\bar{\gamma}) = \frac{1}{\text{Re}} + \frac{B}{\sqrt{\bar{\gamma}^2 + \varepsilon^2}}. \quad (5.11)$$

Cependant nous allons choisir une méthode de régularisation de la viscosité un peu différente en privilégiant un critère faisant intervenir le minimum entre la viscosité théorique et une viscosité seuil η_{max} qui peut être aussi grande que l'on veut :

$$\bar{\eta}(\bar{\gamma}) = \min \left(\eta_{max}, \frac{1}{\text{Re}} + \frac{B}{\bar{\gamma}} \right). \quad (5.12)$$

Cette méthode a notamment été utilisée par [Staron *et al.* \(2013\)](#) pour étudier l'effondrement gravitaire d'une colonne constituée d'un fluide à seuil.

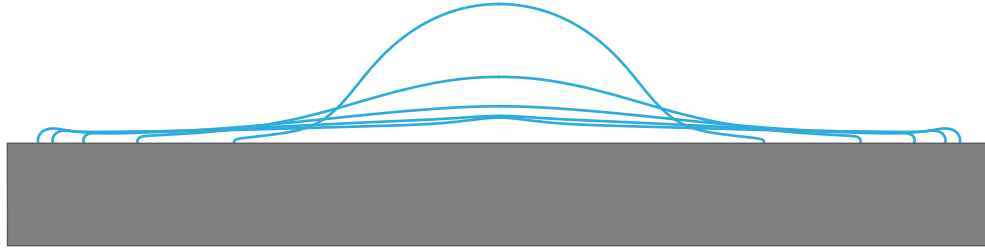


FIGURE 5.4 – Expérience numérique pour un impact de goutte sur une surface solide pour un nombre de Bingham $B = 5.10^{-3}$. Ici le nombre de Bingham est faible donc la phase d'étalement est proche de ce qu'on pourrait obtenir avec un impact équivalent pour un fluide newtonien. En revanche la goutte se fige lorsque le rayon mouillé est environ 3,5 fois plus grand que le rayon initial et la phase de récession est supprimée. Les nombres de Reynolds et de Weber sont respectivement de 1020 et 730. L'interface de la goutte est représentée pour des temps \bar{t} variant de 1 à 5.

Le défaut majeur de cette approche, contrairement à la méthode de lagrangien augmenté (Fortin et Glowinski 1983), réside dans la détermination de la surface de plasticité. En effet sa position peut être influencée par le choix de la viscosité seuil η_{max} et il est important de s'assurer de la convergence de la solution vis-à-vis de ce paramètre.

5.3.2 Rayon maximal atteint

L'évolution de la surface de plasticité pour le problème de l'impact de goutte est assez complexe. Au départ la goutte tombe à vitesse constante ce qui implique que $\dot{\gamma} = 0$ dans tout le fluide, qui est alors dans sa phase plastique. Dès qu'il y a contact, la goutte subit un cisaillement important et la zone au voisinage de l'impact commence à être fluidisée. Il y a alors une progression de la surface de plasticité vers le haut au cours du temps lors de l'étalement de la goutte. Dans certains cas celle-ci peut ensuite se figer lorsqu'elle atteint son rayon maximum et ainsi la phase de récession peut être supprimée (Luu et Forterre 2009). A ce moment là, la goutte est de nouveau entièrement dans un état plastique.

Afin de proposer une ébauche d'étude qualitative sur l'évolution du rayon maximal atteint par une goutte de fluide à seuil impactant un solide en fonction du nombre de Bingham, nous représentons sur les figures 5.4 et 5.5 l'évolution de l'interface de la goutte obtenues à l'aide de deux expériences numériques réalisées avec *Gerris* pour un nombre de Reynolds de 1020 et un nombre de Weber de 730. Les nombres de Bingham sont respectivement de 5.10^{-3} et de 0,5. Afin de rester cohérent avec les premiers chapitres de ce manuscrit et afin de faciliter la comparaison des solutions numériques, les conditions initiales des simulations sont exactement celles du chapitre 2 à savoir que nous nous plaçons dans une situation post-impact.

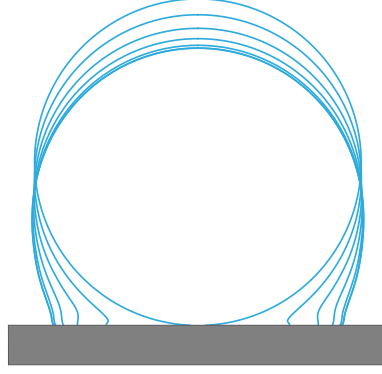


FIGURE 5.5 – Expérience numérique pour un impact de goutte sur une surface solide pour un nombre de Bingham $B = 0,5$. Dans ce cas, l'impact ne peut plus du tout être considéré comme inertiel et la goutte se fige avant que le rayon d'étalement n'ait atteint le rayon de la goutte. Les nombres de Reynolds et de Weber sont respectivement de 1020 et 730. L'interface de la goutte est représentée pour $\bar{t} = 10^{-4}, 10^{-1}, 2 \cdot 10^{-1}, 3 \cdot 10^{-1}, 4 \cdot 10^{-1}$ et $5 \cdot 10^{-1}$.

Dans le premier cas, la phase d'étalement ressemble beaucoup au cas newtonien puisque le nombre de Bingham reste faible. Cependant on constate qu'au bout d'un certain temps, la goutte se fige et la phase de récession est supprimée. Lorsque le nombre de Bingham est de l'ordre de l'unité comme cela est le cas sur la figure 5.5, l'impact ne peut plus du tout être considéré comme inertiel et la goutte se fige avant que le rayon d'étalement ait atteint le rayon initial de la goutte. On constate comme on pouvait s'y attendre que le rayon maximal atteint diminue lorsque le nombre de Bingham augmente. Une détermination théorique de ce rayon nécessite une bonne connaissance de la contrainte de cisaillement τ au voisinage du support. En effet il doit exister un certain temps $t_{Bingham}$, qui doit dépendre des propriétés de l'impact, pour lequel τ ne dépasse plus la contrainte seuil au moins au niveau de la ligne de contact. La théorie de Wagner n'étant plus du tout valable pour des temps proches de $t_{Bingham}$, il est fort possible qu'il faille totalement repenser le problème de façon à obtenir un modèle qui décrive correctement la phase de l'étalement où la goutte se fige.

5.3.3 Cône de plasticité

Nous nous sommes particulièrement intéressés dans cette thèse à la structure de l'écoulement dans la goutte au moment de l'impact. Nous avons notamment déterminé aux temps courts la structure de point d'arrêt en montrant que dans cette zone la vitesse dépend des variables r/\sqrt{t} et z/\sqrt{t} (voir le paragraphe 2.3.5.3). Pour des temps intermédiaires il a été montré par ailleurs que le champ de vitesse était de la forme $\vec{u} \simeq (r/t, -2z/t)$ (Eggers *et al.* 2010; Lagubeau *et al.* 2012).

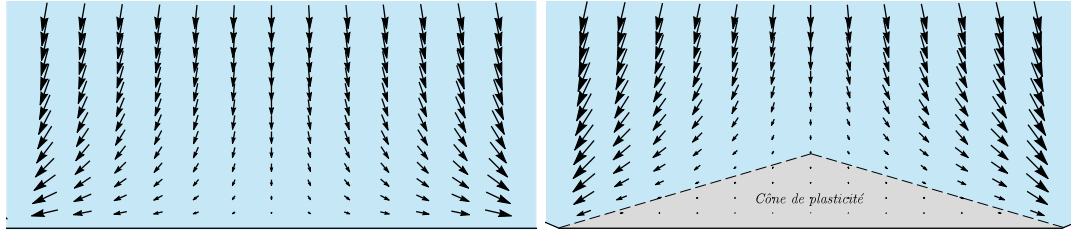


FIGURE 5.6 – Champ de vitesse au voisinage du point d’arrêt pour un impact de goutte newtonien (gauche) et pour un fluide à seuil avec un nombre de Bingham $B=10$, un nombre de Reynolds $Re = 1170$ et un nombre de Weber $We = 385$ (droite). Le champ de vitesse du cas newtonien est extrait de la simulation réalisée dans le cadre du chapitre 2. Les deux figures représentent l’état de l’écoulement à $\bar{t} = 5.10^{-2}$. On constate que les effets non-newtoniens modifient radicalement la structure de l’écoulement par l’intermédiaire d’un cône de plasticité dont la position est ici suggérée par les lignes discontinues.

Lorsqu’on considère un impact de goutte pour un fluide à seuil, un nouveau régime est atteint dans cette zone particulière. En effet, les vitesses sont très faibles dans cette région par définition. Par conséquent les taux de cisaillements le seront également et une zone plastique de forme conique ou pyramidale se développe au voisinage du point d’arrêt au cours du temps. Cet effet est d’autant plus prononcé que le nombre de Bingham est grand. Une façon de repérer le cône de plasticité consiste à regarder l’évolution de la surface de transition entre les phases fluides et plastiques. Cependant, dans l’état actuel d’avancement de cette étude, il y a numériquement trop d’incertitudes quant à la position de cette surface comme nous l’avons expliqué précédemment, bien que celle-ci apparaisse clairement dans les simulations. Nous préférons alors représenter le champ de vitesse au voisinage du point d’arrêt pour un impact où la contrainte seuil est bien supérieure aux contraintes inertielles ($B=10$). En comparant la forme du champ obtenu au même instant pour le cas newtonien du chapitre 2, nous constatons que les effets non-newtoniens modifient de manière spectaculaire la structure du champ de vitesse dans cette région avec la présence d’un cône de plasticité (Fig. 5.6).

Ce cône de plasticité n’est pas sans rappeler la zone morte mise en évidence par [Elowitz et al. \(2013\)](#) lorsqu’on propulse un jet granulaire à haute vitesse contre un impacteur (Fig. 5.7). Lors de cette expérience une nappe de forme conique est éjectée avec un angle d’ouverture bien défini. On retrouve alors le pendant granulaire des cloches liquides (ouvertes) de [Savart](#) que nous avons présenté au chapitre 4. Par ailleurs [Cheng et al. \(2007\)](#), qui ont les premiers réalisé cette expérience remarquent d’une part que de larges jets granulaires produisent des nappes dont la forme résulte de l’absence de forces cohésives au sein de ce matériau. Autrement dit les nappes granulaires engendrées se comportent comme si elles étaient constituées d’un liquide sans tension de surface. D’autre part [Cheng et al.](#) ont montré que l’angle d’éjection de la nappe était le même pour un jet granulaire et pour un jet liquide dans la limite des grands nombre de Weber. [Elowitz](#)

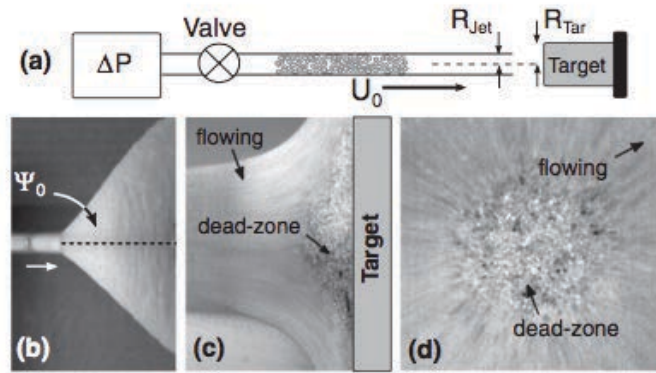


FIGURE 5.7 – Figure 1 de [Elowitz *et al.* \(2013\)](#) représentant l'impact d'une colonne granulaire propulsée à grande vitesse contre une cible entraînant l'éjection d'une nappe avec un angle bien défini. Cette expérience présente de manière évidente une analogie avec les cloches liquides de [Savart](#).

[et al. \(2013\)](#) complètent cette étude en montrant que ces angles sont bien égaux alors que la structure interne de l'écoulement est très différente. Cette analogie avec les granulaires montre que ce type de structure au voisinage du point d'arrêt est caractéristique de ces liquides aux rhéologies particulières.

Une étude plus approfondie de ce cône de plasticité pourrait être une direction de recherche intéressante pour essayer de mieux comprendre le problème de l'impact de goutte pour des nombres de Bingham important. De manière évidente cette structure particulière doit influencer la couche limite se développant le long du substrat solide et mérite par conséquent une attention particulière. De plus la connaissance de la couche limite devrait permettre de déterminer la contrainte de cisaillement pariétale qui pourrait avoir un rôle à jouer dans le mécanisme de figement de la goutte lorsqu'elle atteint son rayon maximal.

5.4 Conclusion

Dans ce court chapitre nous avons proposé une introduction aux impacts de gouttes pour des fluides à seuil. Nous avons notamment montré que la théorie wagnérienne aux temps court que nous avons développé au chapitre 2 reste valable si le nombre de Bingham associé à l'impact, défini comme le rapport de la contrainte seuil sur les contraintes inertielles, est de l'ordre de l'unité. Par l'intermédiaire d'expériences numériques réalisées à l'aide de *Gerris* nous avons pu proposer une étude préliminaire de l'évolution du rayon maximal atteint en fonction du nombre de Bingham. Nous avons également mis en évidence la présence d'un cône de plasticité au voisinage du point d'arrêt, modifiant ainsi la structure de l'écoulement. Une bonne compréhension de l'évolution de ce phénomène

est de notre point de vue une étape intermédiaire importante pour la compréhension globale du problème.

Chapitre 6

Conclusion et perspectives

6.1 Principaux résultats

L'objectif de cette thèse était de proposer un modèle théorique permettant d'obtenir une meilleure compréhension du problème de l'impact de goutte lorsque l'inertie est l'effet dominant. Pour cela nous avons essayé de procéder par analogie en nous plaçant dans le contexte plus général des problèmes d'impacts au sens large.

Nous avons montré au chapitre 2 qu'il y avait une très forte connexion entre le problème de l'impact de goutte aux temps courts et le problème de l'impact d'un objet solide dans l'eau. Un cadre théorique très puissant, basé sur la théorie des écoulements potentiels, a été développé pour l'étude de ce type de problèmes depuis les travaux fondateurs de [Wagner \(1932\)](#) sur l'amerrissage des hydravions. Une des idées fortes de [Wagner](#) est de modéliser la partie du flotteur en contact avec la surface libre par une plaque plane dont le rayon grandit au cours du temps. En s'appuyant sur cette hypothèse il a notamment montré que l'écoulement engendré par l'impact était un écoulement de contournement autour de la ligne de contact entre le solide et la surface libre. En nous appuyant sur des expériences numériques réalisées avec le solveur des équations de Navier-Stokes *Gerris* nous avons pu montrer que l'écoulement aux temps courts au sein d'une goutte lorsque celle-ci impacte un solide contourne également la ligne de contact. Nous avons pu ainsi mettre en évidence une analogie avec l'écoulement engendré par l'ascension dans un fluide infini d'une plaque plane dont le rayon croît au cours du temps ([Lamb 1932](#)). Ce constat nous a permis de comprendre que le cadre théorique utilisé par [Wagner](#) et ses successeurs pouvait être utilisé afin de modéliser les instants primordiaux de l'impact d'une goutte sur un support solide. D'autre part ce résultat suggère plus concrètement que le mouvement de la ligne de contact est analogue à un mouvement de chenille de tank jusqu'à l'apparition d'une nappe liquide. Enfin cela montre que la loi du mouvement de

la ligne de contact peut être déterminée à partir de la connaissance du champ de vitesse vertical. Cette dernière quantité est obtenue par l'intermédiaire d'une ultime condition, dite *condition de Wagner*, faisant le raccord entre la position du solide et la position de la surface libre. En utilisant les outils de l'analyse asymptotique nous avons pu alors écrire le problème à l'ordre dominant permettant ainsi de dégager les mécanismes essentiels à la bonne compréhension du phénomène. Nous avons par ailleurs montré que ce problème admet des solutions semblables dépendant des variables r/\sqrt{t} et z/\sqrt{t} . La résolution de ces équations dans l'espace autosimilaire nous a permis dans un premier temps de calculer le potentiel des vitesses. Nous en avons déduit grâce à la condition de Wagner que la loi de mouvement de la ligne de contact est donnée par $d(t) = \sqrt{3t}$. Cette quantité est fondamentale pour la résolution du problème aux temps courts puisqu'elle intervient de manière explicite dans l'expression du champ de vitesse et de pression, tous deux déduits du potentiel des vitesses.

Le champ de pression se révèle être concentré au voisinage de la région d'impact et de manière surprenante possède un maximum près de la ligne de contact plutôt qu'au centre. Cet aspect localisé du champ explique pourquoi [Engel \(1955\)](#) avait remarqué dans ses expériences que le sommet de la goutte tombe en chute libre lors des tout premiers instants de l'impact. Le champ de vitesse quant à lui présente une structure de point d'arrêt au voisinage du centre de l'impact dépendant de manière surprenante des variables r/\sqrt{t} et z/\sqrt{t} . Cette théorie wagnérienne nous a de plus permis d'obtenir de nombreuses prédictions théoriques. En effet les champs de vitesses et de pression peuvent être exprimés de manière explicite à l'aide de fonctions élémentaires le long du rayon mouillé et le long de l'axe de symétrie de la goutte. En particulier la pression au centre de l'impact s'exprime simplement par la relation $p(t) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} t^{-\frac{1}{2}} \rho U^2$. Ces prédictions théoriques se sont toutes révélées être en bon accord avec les simulations numériques réalisées avec *Gerris* aussi bien quantitativement pour les solutions que nous avons pu déterminer de manière explicite que qualitativement quant à la structure globale des champs de pression et de vitesse.

Enfin nous avons proposé une approximation de la solution de couche limite à l'aide d'une analogie avec la couche limite générée par une onde de choc dans un milieu fluide ([Mirels 1955](#)). La solution ainsi obtenue est raccordée à la solution non visqueuse de la théorie de [Wagner](#) et se révèle être en bon accord avec les solutions numériques obtenues avec *Gerris*. Nous avons pu en déduire une expression de la contrainte de cisaillement pariétale et proposer une estimation de la traînée totale, qui présente dans notre théorie une singularité logarithmique.

Les résultats théoriques que nous avons obtenus dans ce chapitre, en bon accord sur plusieurs décades avec des simulations numériques montrent le bien-fondé de l'analogie

entre l'impact d'une goutte sur une solide lorsque *l'inertie est l'effet dominant* et l'impact d'un objet solide dans un bain liquide.

Le chapitre 3 prolonge l'étude précédente en proposant de déterminer les causes de la perte de similarité de la solution aux temps intermédiaires. En effet lorsque $t \sim R/U$, les simulations numériques obtenues avec *Gerris* montrent que la pression au centre de l'impact quitte la solution semblable en $t^{-\frac{1}{2}}$ observée pour les temps courts et s'effondre brutalement. De manière simultanée, la structure du champ de pression change et son maximum est dorénavant sur l'axe de symétrie de la goutte. Les causes possibles de ce changement brutal de comportement sont de notre point de vue soit liés à la présence du sommet de la goutte via des effets de confinement ou de ralentissement de ce point soit liés à des effets géométriques induits par la fin de la validité de la loi du mouvement de la ligne de contact en $\sqrt{3t}$ obtenue au chapitre précédent. Nous avons alors adapté le modèle issue de la théorie de [Wagner](#) de façon à tenir compte de la position du sommet de la goutte. En résolvant ce problème numériquement à l'aide du solveur d'équations aux dérivées partielles *FreeFem++* ([Hecht 2012](#)), nous avons pu tester ces hypothèses et mettre en évidence que les effets de ralentissement du sommet de la goutte et les effets géométriques sont vraisemblablement les responsables de la perte de similarité de la solution. Cependant cette étude a permis de mettre en évidence les limites de la théorie de Wagner aux temps intermédiaires puisqu'il n'est pas possible d'obtenir une loi réaliste pour $d(t)$ dans ce régime là avec la condition de Wagner d'où la nécessité de repenser le problème si on veut espérer pouvoir modéliser de manière fine cette perte de similarité.

Dans le chapitre 4 nous avons proposé d'étudier un cas particulier d'évolution aux temps longs en considérant l'expérience de [Rozhkov et al. \(2002\)](#) sur la nappe liquide engendré par l'impact d'une goutte sur une cible cylindrique de taille comparable à celle-ci. Dans le but de prolonger l'analogie avec les problèmes d'impacts nous avons revisité l'étude de [Rozhkov et al.](#) du point de vue impulsif par l'intermédiaire d'une expérience consistant à déposer une goutte sur un support cylindrique que l'on viendrait faire tomber verticalement sur un substrat solide. Au moment de l'impact, la goutte subit un violent changement de ces conditions aux limites déclanchant ainsi la formation d'une nappe liquide analogue aux cloches liquides de [Savart \(1833a\)](#). C'est pour cette raison que nous appelons cette nappe *cloche liquide impulsif*.

Dans un premier temps nous avons déterminé la structure de l'écoulement à l'aide de la théorie de la pression impulsif ([Bagnold 1939](#); [Batchelor 1967](#)). Nous avons en particulier obtenu une expression analytique pour la vitesse de glissement et nous avons montré que cette dernière avait une singularité logarithmique au voisinage de la ligne de contact. La suite du chapitre a été consacrée à la proposition de nouveaux axes de recherche pour ce problème basés sur des analogies avec des études précédentes et nous

avons, lorsque cela était possible, proposé des conjectures quant au comportement de la nappe liquide. La question de la morphologie de la nappe a également été abordée et les simulations préliminaires obtenues avec *Gerris* suggèrent que l'angle d'éjection de la nappe est supérieur à l'angle d'éjection obtenue dans le cadre des cloches liquides de [Savart](#). Finalement ce chapitre qui se voulait exploratoire laisse de nombreuses questions ouvertes que nous ne manquerons pas d'aborder ultérieurement.

Le chapitre 5 propose une très brève introduction aux impacts de goutte de fluides viscoplastiques. En ne considérant de nouveau que les impacts où l'inertie est l'effet dominant, nous avons montré que le problème dépend d'un nouveau nombre sans dimension, que l'on appelle *nombre de Bingham* (noté B), comparant les effets non-newtoniens et les effets inertiels. Nous avons montré que la théorie aux temps courts proposée au chapitre 2 reste valide jusqu'aux nombres de Bingham de l'ordre de l'unité. Cependant le comportement aux temps intermédiaires et aux temps longs peut changer radicalement avec notamment la suppression de la phase de rétraction. Il est cependant clair que la théorie wagnérienne n'est plus du tout valide lorsque le nombre de Bingham devient grand et une nouvelle théorie est à construire pour ce régime là. Nous avons cependant, à l'aide d'expériences numériques réalisées avec *Gerris*, proposé quelques pistes de réflexions concernant notamment le rayon maximal atteint par la goutte ou la structure interne de l'écoulement. En effet nous avons pu vérifier que le rayon maximal atteint par la goutte dépend bien du nombre de Bingham et nous avons montré que celui-ci peut être inférieur au rayon initial de la goutte pour $B \sim 1$. Enfin un cône de plasticité analogue à la zone morte observée lors de l'impact d'un jet granulaire sur une plaque, a été mis en évidence au voisinage du point d'arrêt modifiant ainsi fortement la structure de l'écoulement dans cette région.

6.2 Perspectives

6.2.1 Problème aux temps intermédiaires

Nous avons déjà esquissé quelques perspectives possibles quant aux problèmes de l'impact de goutte pour les temps intermédiaires. En effet nous avons mis en évidence que la théorie de Wagner ne permet plus de modéliser correctement l'impact dans ce régime là. Nous souhaitons par conséquent proposer un nouveau modèle qui permette de capturer de manière plus précise la décroissance de la pression observée avec *Gerris*. De même, un pas important serait de réussir à faire la transition entre la solution de point d'arrêt aux temps courts obtenue dans cette thèse $\bar{\mathbf{u}} \simeq (\bar{r}/\sqrt{\bar{t}}, -2\bar{z}/\sqrt{\bar{t}})$ et la solution aux temps intermédiaires donnée par $\bar{\mathbf{u}} \simeq (\bar{r}/\bar{t}, -2\bar{z}/\bar{t})$ ([Eggers et al. 2010](#); [Lagubeau et al. 2012](#)).

Un autre aspect intéressant de l'impact aux temps intermédiaires que nous n'avons pratiquement pas abordé concerne la régularisation de la pression le long du rayon mouillé au voisinage de la zone de naissance de la nappe liquide. Il pourrait être intéressant pour cela de raccorder la solution obtenue au sein de la goutte avec l'écoulement dans la nappe liquide à l'aide des outils de l'analyse asymptotique. Ceci nous permettrait de lever la singularité théorique pour la pression et nous donnerait la vitesse d'injection dans la nappe liquide. De même la question de la régularisation de la trainée totale par des effets visqueux ou inertiels reste mystérieuse. Pour clarifier ce point une description plus précise de la couche limite est nécessaire et on peut imaginer que la question du raccord avec la nappe liquide aura certainement une grande importance.

6.2.2 Effets de l'air

Nous avons exposé dans le paragraphe 2.5.2 un prolongement possible de notre étude afin de tenir compte des effets de l'air. En effet la théorie wagnérienne développée dans cette thèse est une théorie post-impact dans la sens où nous considérons qu'il existe déjà une surface de contact entre solide et fluide dans notre modèle. Cependant il est maintenant bien connu que la goutte se déforme avant de toucher le sol à cause de la pression de lubrification de l'air et par conséquent une bulle est capturée à la base de la goutte lors de l'impact. Nous avons montré à l'aide de simulations numériques réalisées avec *Gerris* que cette poche d'air ne modifie pas radicalement la pression à la base du liquide lors du contact mais que la solution est simplement translatée. Nous avons également montré qu'il y a une réelle continuité entre la pression dans l'air et la pression liquide nous permettant de penser qu'une théorie tenant compte de cet effet pré-impact est envisageable. Bien qu'en réalité la façon dont la goutte va entrer en contact avec le solide est très complexe comme le montrent les expériences de Kolinski *et al.* (2012), un modèle faisant la connexion entre les effets de l'air sur la goutte avant l'impact et l'écoulement au sein de celle-ci est souhaitable et permettrait d'obtenir un niveau de compréhension satisfaisant. Cette étude théorique pourrait être menée en parallèle d'une étude numérique avec *Gerris* dans laquelle nous pourrions faire varier le nombre de Stokes dans le même esprit d'expérience numérique utilisé au cours de cette thèse.

6.2.3 Impact de goutte pour des fluides à seuil

Nous avons abordé à la fin de cette thèse le problème de l'impact de goutte pour des fluides viscoplastiques. Ce domaine de recherche est encore très récent et de nombreuses questions restent ouvertes que ce soit du point de vue de la modélisation du problème ou du point de vue expérimental. Nous avons proposé quelques directions de recherche

dans ce dernier chapitre concernant notamment l'influence du nombre de Bingham sur le rayon maximal atteint. Nous pensons que la question de l'évolution de la surface de plasticité peut avoir un rôle important à jouer en particulier au voisinage de la ligne de contact. Une étude numérique plus poussée permettant d'avoir des résultats fiables pour cette quantité est souhaitable. De même nous avons montré qu'un cône de plasticité apparaît au voisinage du point d'arrêt modifiant ainsi la structure de l'écoulement. Cet effet est d'autant plus prononcé que le nombre de Bingham est grand. Afin de mieux comprendre l'évolution de ce cône, une bonne connaissance des taux de déformations dans cette région est nécessaire et il pourrait être intéressant de chercher à obtenir une loi d'évolution de celui-ci. Son influence sur la couche limite est également une question qui mérite d'être posée.

De même, l'influence des effets non-newtoniens sur la fossette (*dimple*) mérite une étude particulière. En effet, on peut imaginer que si la contrainte seuil est assez grande, la pression de lubrification puisse ne plus être suffisante pour déformer le bas de la goutte de manière importante. Par ailleurs la limite $B \rightarrow \infty$ correspondant à un comportement de solide incompressible est un cas intéressant à considérer et une analogie avec le contact de Hertz doit être possible.

Il est également possible de rajouter plusieurs niveaux de complexité pour ce problème. En effet les lois de comportement constitutives des fluides considérés sont valables à fréquence nulle. Cependant chaque problème d'impact est associé à des sollicitations sur une large gamme de fréquence. Par conséquent on peut s'attendre à des effets viscoélastiques même si le fluide utilisé est *a priori* purement viscoplastique. C'est d'ailleurs pour cette raison que [Luu et Forterre \(2009\)](#) ont proposé un modèle élasto-viscoplastique pour décrire l'étalement inertiel d'une goutte constitué d'un fluide à seuil. De même des effets thixotropes pourrait être pris en compte.

Dans cette thèse nous avons très peu parlé des problèmes de transitions de l'étalement vers le *splashing* mais une question très intéressante et qui, à notre connaissance n'a pas été résolue est la question de l'influence des effets non-newtoniens sur cette transition. On peut imaginer que ces effets vont avoir un rôle stabilisateur et pourrait probablement supprimer le *splash* de même que les effets de l'air par exemple comme l'on montré [Xu et al. \(2005\)](#).

6.2.4 Impact sur solide mou

Dans cette thèse nous n'avons considéré que les cas où le solide sur lequel la goutte impacte est indéformable. Il pourrait être intéressant d'essayer d'appliquer notre modèle wagnérien à l'étude de l'impact de goutte sur solide mou de façon à prolonger l'étude

de [Mangili et al. \(2012\)](#). La question de la déformation du substrat induit par l'impact de la goutte pourrait être abordée avec notre point de vue. Notre prédiction théorique donnant l'évolution aux temps courts de la force normale totale pourrait être utile à la résolution de ce problème. Il y a cependant de nombreuses difficultés notamment en ce qui concerne les problèmes de dissipation au niveau de la ligne de contact. De même, la question de l'influence de la nature du substrat sur la loi du mouvement de la ligne de contact est clairement posée. Une modification de cette loi entraînerait de manière certaine une modification de la pression le long du rayon mouillé et de la force normale totale. Donc la question de la ligne de contact pourrait être de première importance comme cela est déjà le cas pour le problème statique ([Dervaux et Limat 2015](#)).

Annexe A

Numerical simulations with the Gerris flow solver

A.1 Mesh convergence study

All the numerical simulations were performed with the open-source code *Gerris* (freely downloadable at <http://gfs.sourceforge.net> – see also Popinet 2003, 2009; Lagrée *et al.* 2011, for details). *Gerris* is a solver of the incompressible Navier-Stokes equations taking into account multiple phases and surface tension. The code makes use of a finite-volume approach and of a Volume-of-Fluid (VoF) method for an accurate description of the transport of the interfaces between two-phase flows. It also features an adaptive mesh refinement procedure allowing for both a precise description of flows with large scale separation and a reduction of computational costs. Typically in our simulations the finest grid is chosen to be concentrated along free surfaces and within the contact zone to fully capture the features of the pressure field and of the boundary layers (see Fig. A.1). In these areas the corresponding local resolution usually corresponds to 4096×4096 but

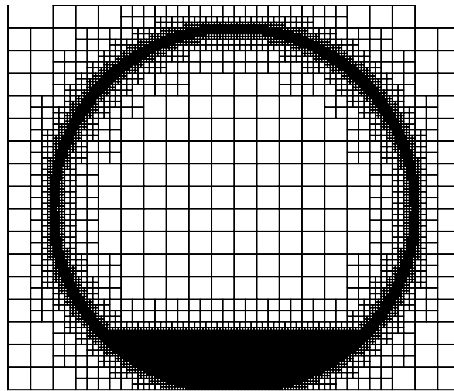


FIGURE A.1 – Typical mesh structure refined adaptively by *Gerris* flow solver during a simulation.

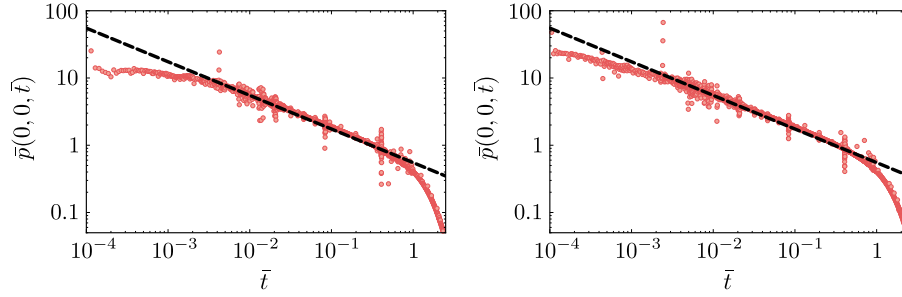


FIGURE A.2 – Comparison between the pressure measured in the *Gerris* simulations at the origin for two different maximum level of mesh refinement (red dots) and the theoretical prediction (black dashed line). The left panel corresponds to a simulation where the maximal grid density is 2048×2048 , and the right panel to a simulation where the maximal density is 4096×4096 (in both cases the physical parameters are $\text{Re} = 5000$ and $\text{We} = 250$). The analytical solution of the pressure is given by $\bar{p}(0, 0, \bar{t}) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \bar{t}^{-\frac{1}{2}}$, see equation (2.64). After a short transient, both simulations quickly reach the same self-similar asymptotic regime.

can reach local density as high as 32768×32768 if needed (examples being Fig. 2.1 or Fig. 2.2).

The simulations carried out in this study all correspond to the impact of a water drop in air with a Reynolds number of 5000 and a Weber number of 250. The computations were performed in an axisymmetric configuration. We emphasize that both liquid and air motions were computed with *Gerris*, but, to be consistent with the post-impact theory developed in this paper the simulations disregarded air cushioning and dimple formation (except explicitly specified, see §2.5.2). To avoid dimple formation in this multiphase flow simulation, the initial configuration is set to a slightly truncated liquid sphere already touching the solid surface. The liquid is initialised with a constant downward velocity. The initial sphere penetration $\bar{r}_0 = 10^{-4}$ is at most one grid cell deep (for example the grid spacing is $\Delta x \simeq 5 \times 10^{-4}$ for 4096×4096 simulations). Finally a no-slip boundary condition is enforced at the substrate level and the contact angle is fixed at $\pi/2$. The reliability of the results has been thoroughly checked with a convergence study on the refinement level, and with particular attention paid for the pressure field and the position of the contact line convergence. Fig. A.2 proposes a comparison between the evolution of the pressure field measured at the origin for two levels of resolution (2048×2048 and 4096×4096). For both cases the numerical solution quickly converges to the theoretical solution $\bar{p}(0, 0, \bar{t}) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \bar{t}^{-\frac{1}{2}}$ (see equation (2.64)) around $\bar{t} = 5 \times 10^{-3}$ and leaves the self-similar regime at around $\bar{t} = 6 \times 10^{-1}$. We remark that after a transient period, both numerical solutions give consistent information and collapse onto the theoretical solution over almost three decades. Note that the occurrence of sporadic glitches in the numerical solution (see *e.g.* Figs 2.19, A.2 or A.3) are to be related with the classic difficulty of computing the pressure in projection methods, such as the one implemented in *Gerris* (Brown *et al.* 2001; Popinet 2003). We finally remark that

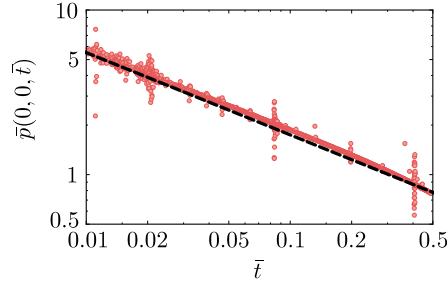


FIGURE A.3 – Close-up of Fig. A.2 right. Note that the numerical evolution for the pressure is slightly above (about 7 %) the analytical solution.

an error of ca. 7 % between the numerical prediction for the pressure at the origin and the theoretical prediction was consistently noted in our simulations (see Fig. A.3). The nature of this discrepancy is uncertain though, and might either be related to the aforementioned numerical difficulties in computing the pressure or to the limits of our first-order asymptotic description for drop impact.

A.2 *Gerris* parameter file

A minimal *Gerris* parameter file allowing to reproduce the results presented in this manuscript is provided here for the reader's convenience :

```

Define t0 1e-4
Define Re 5000
Define ReAir 277778
Define We 250
Define VAR(T,min,max) (min + CLAMP(T,0,1)*(max - min))
Define RHO_EAU 1000.
Define RHO_AIR 1.
Define RHO(T) VAR(T, RHO_AIR/RHO_EAU, RHO_EAU/RHO_EAU)

4 3 GfsAxi GfsBox GfsGEdge {y=0.5 x=0.5} {
  Time { t=t0 end = 2.5 dtmax = 1e-4 }
  PhysicalParams { L = 2 }
  VariableTracerVOFHeight T
  VariableFiltered T1 T 1
  VariableCurvature K T Kmax
  SourceTension T (1./We) K
  InitFraction T ({
    double goutte = -(x+t0-1.)*(x+t0-1.) - (y)*(y) + 1.*1.;
    return (goutte);
  })
  Init {}{ U=-1*(T) V=0}
# Initial refining

```

```

    RefineSurface 12 ( -(x+t0-1.)*(x+t0-1.) - (y)*(y) + 1.*1. )
    Refine ( ((x>0.)&&(x<0.3)&&(y>0.)&&(y<4.)) ? 12 : 4 )
# Refining on tracer gradient
    AdaptGradient { istep = 1 } { maxlevel = 12 cmax = 1e-2 } T
# Constant value of mesh's level inside the bulk
    AdaptFunction { istep = 1 } {
    maxlevel = ( ((x>0.)&&(x<0.3)&&(y>0.)&&(y<4.)) ? 12 : 4 )
    cmax = 1e-2 } (T==1)
    RemoveDroplets { istep = 1 } T -1
    PhysicalParams { alpha = 1./RHO(T1) }
    SourceViscosity { } (T*(1./Re) + (1. - T)*(1./ReAir)) {beta = 1}
    OutputTime { istep = 1 } stderr
    OutputTiming { step = 0.0001 } stderr
    OutputSimulation { istep = 1 } stdout
    OutputProjectionStats { istep = 1 } stderr
}
#1
GfsBox {
    bottom =Boundary{
    left = Boundary{
        BcDirichlet U 0
        BcDirichlet V 0 }
    }
#2
GfsBox {
    right = Boundary{
        BcDirichlet P 0
        BcNeumann U 0
        BcNeumann V 0 }
    bottom = Boundary{ }
    top = Boundary{
        BcDirichlet P 0
        BcNeumann U 0
        BcNeumann V 0 }
    }
#3
GfsBox {
    left = Boundary{
        BcDirichlet U 0
        BcDirichlet V 0 }
    right = Boundary{
        BcDirichlet P 0
        BcNeumann U 0
        BcNeumann V 0 }
    }
#4
GfsBox {
    right = Boundary{

```

```

        BcDirichlet P 0
        BcNeumann U 0
        BcNeumann V 0 }
top = Boundary{
        BcDirichlet P 0
        BcNeumann U 0
        BcNeumann V 0 }
left = Boundary{
        BcDirichlet U 0
        BcDirichlet V 0 }
}
1 2 right
1 3 top
3 4 top

```

A.3 Conclusion

One of the main approach of this thesis is to use *Gerris* simulations as numerical experiments to obtain useful informations to model the drop impact problem and then to compare with theoretical predictions. By using adaptive mesh refinement we can choose regions of interest in order to reduce computational cost. In our case we are mostly interested in the bottom of the drop because we want to capture precisely the boundary layer and the pressure field which is concentrated in this area at the beginning of the impact. By computing the pressure at the origin of the impact, we have shown with a mesh convergence study that our results are well captured by the *Gerris* numerical simulations we performed.

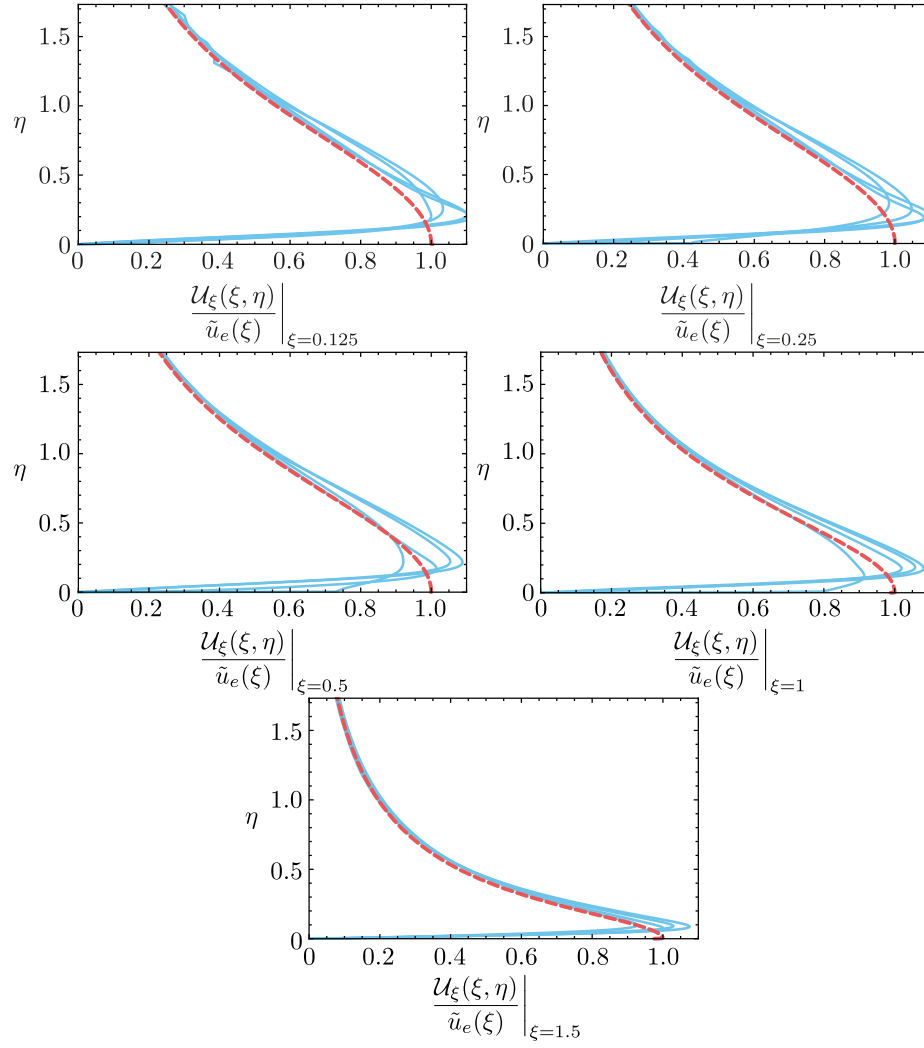
Annexe B

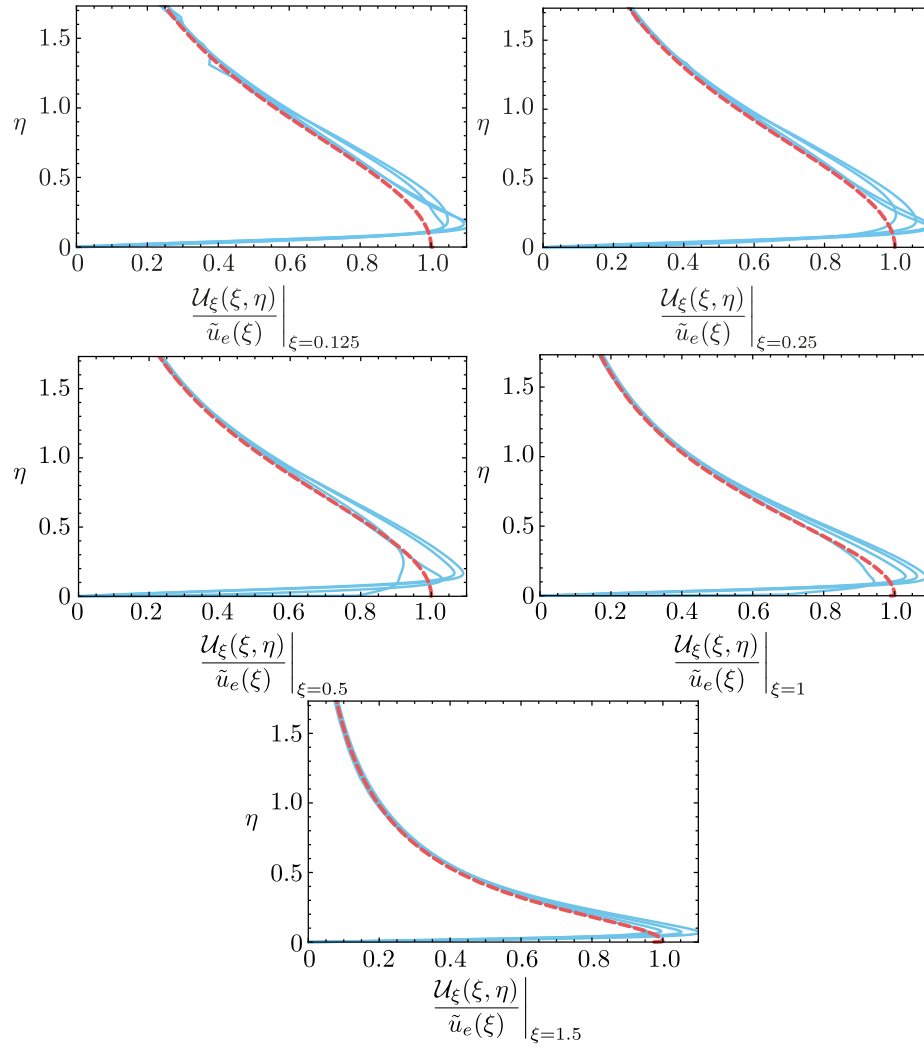
Influence of Reynolds number on short-time solutions

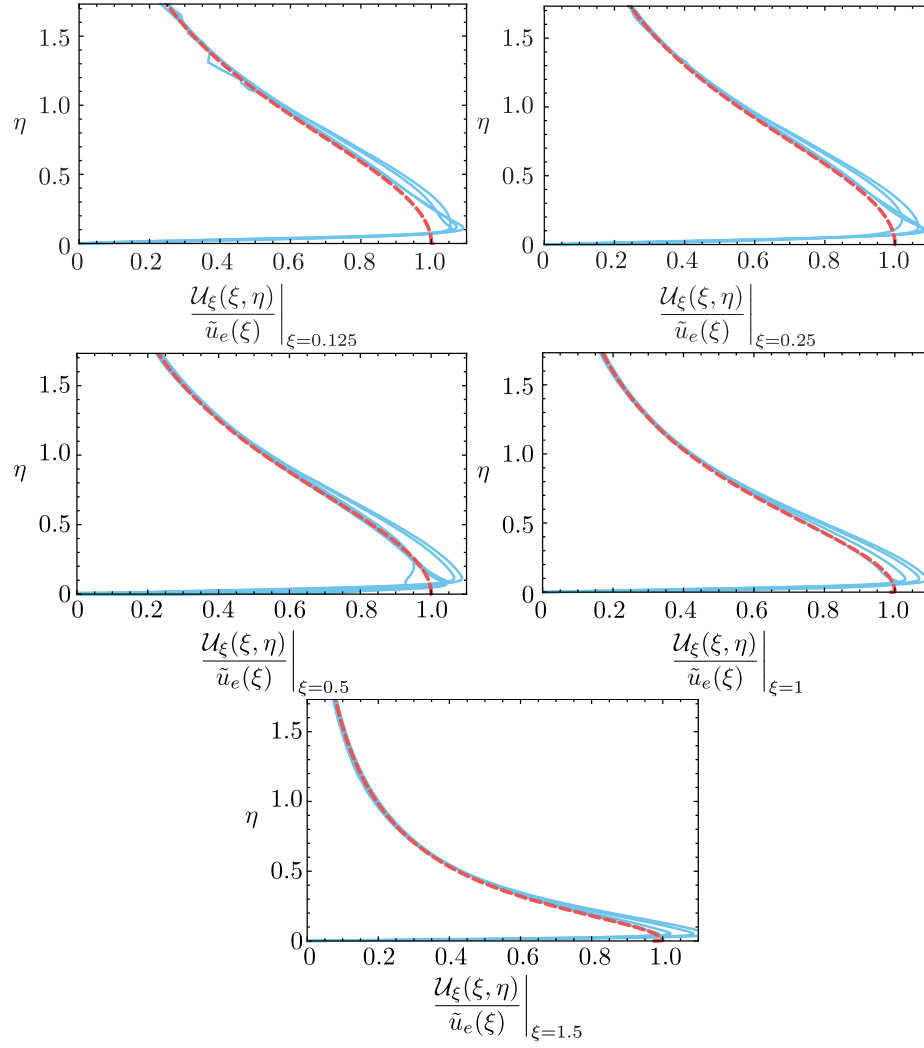
As explained in §2.4 we obtained an approximate viscous solution based on an analogy with the boundary layer induced by a shock wave (Mirels 1955). The solution has been matched with the inviscid solution deduced from Wagner's theory in order to obtain a composite solution. By performing extra simulations for Reynolds number of 250, 500, 1250 and 2500 with a Weber number $We = 250$ we check in this appendix that solutions of the inviscid problem are insensitive to variation of Reynolds number and determine what is the influence of this parameter on the viscous solution.

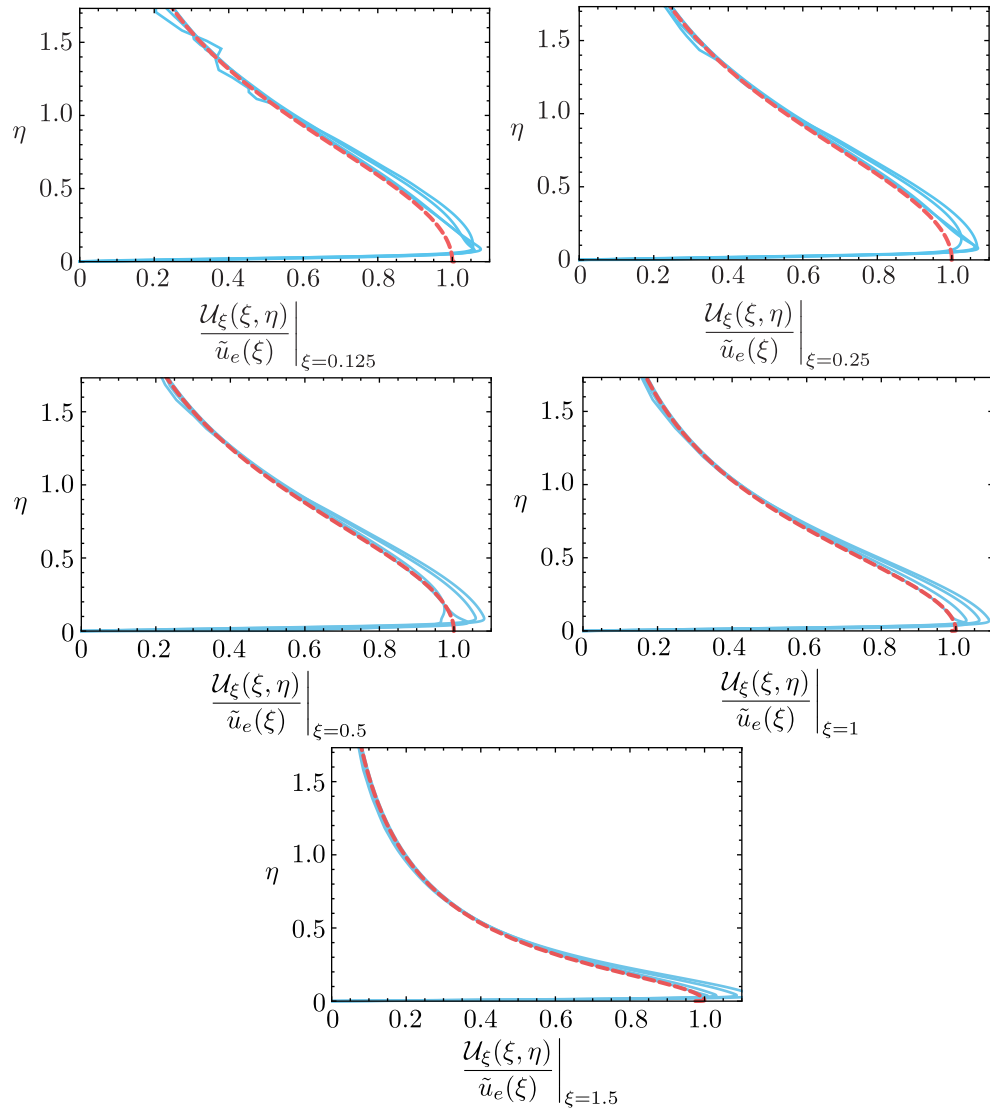
B.1 Inviscid solutions

Radial velocity profiles rescaled in the self-similar space corresponding to various locations of ξ for Reynolds number of 250, 500, 1250 and 2500 are represented respectively by figure B.1, B.2, B.3 and B.4. As expected the agreement between the inviscid solution of the radial velocity and numerical simulations is still very good whatever the Reynolds number. In a similar way the time evolution of the pressure at the impact origin is represented for a fixed value of the Weber number $We = 250$ and Reynolds number of 250, 500, 1250, 2500 and 5000 (Fig. B.5). All the curves are superposed and pressure is insensitive to Reynolds number as predicted by our theory.

FIGURE B.1 – Same as Fig. 2.13, but for Reynolds number $\text{Re} = 250$.

FIGURE B.2 – Same as Fig. 2.13, but for Reynolds number $\text{Re} = 500$.

FIGURE B.3 – Same as Fig. 2.13, but for Reynolds number $Re = 1250$.

FIGURE B.4 – Same as Fig. 2.13, but for Reynolds number $Re = 2500$.

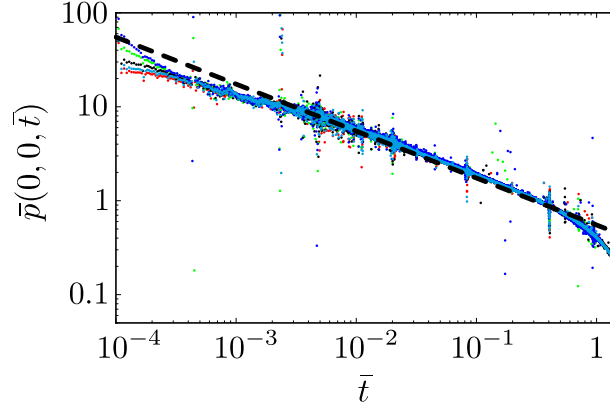


FIGURE B.5 – Time evolution of the pressure $\bar{p}(0, 0, \bar{t})$ measured at the origin in the numerical simulations with *Gerris* for Reynolds number of 250, 500, 1250, 2500 and 5000. The Weber number is still $We = 250$. The theoretical prediction given by the inviscid theory $\bar{p}(0, 0, \bar{t}) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \bar{t}^{-\frac{1}{2}}$ is superimposed with a black dashed line. As expected the pressure is the same in all cases.

B.2 Viscous solution

Theoretical composite solution (equation (2.73)) is compared with numerical solutions extracted from *Gerris* in Fig. B.6, Fig. B.7, Fig. B.8 and Fig. B.9 respectively for Reynolds number of 250, 500, 1250 and 2500. Interestingly, we note that this asymptotic result remains accurate even for the lowest values of the Reynolds number. However we observed some important deviation of the numerical results for some cases *e.g.* for $Re = 1250$ along $\xi = 0.5$, due to little bubbles of air entrapped by the drop because of the rolling motion for short time.

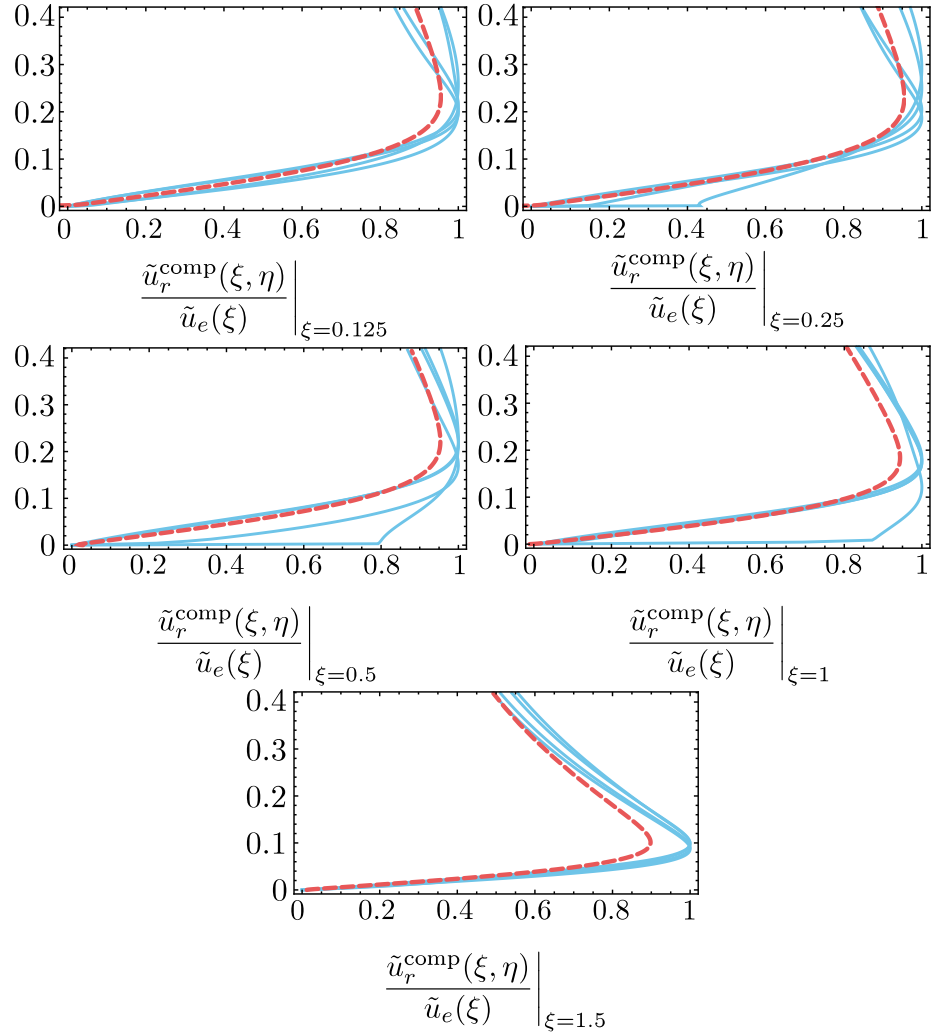


FIGURE B.6 – Same as Fig. 2.22, but for Reynolds number $\text{Re} = 250$. Important deviations are due to bubble entrapment induced by rolling motion of the drop for short time.

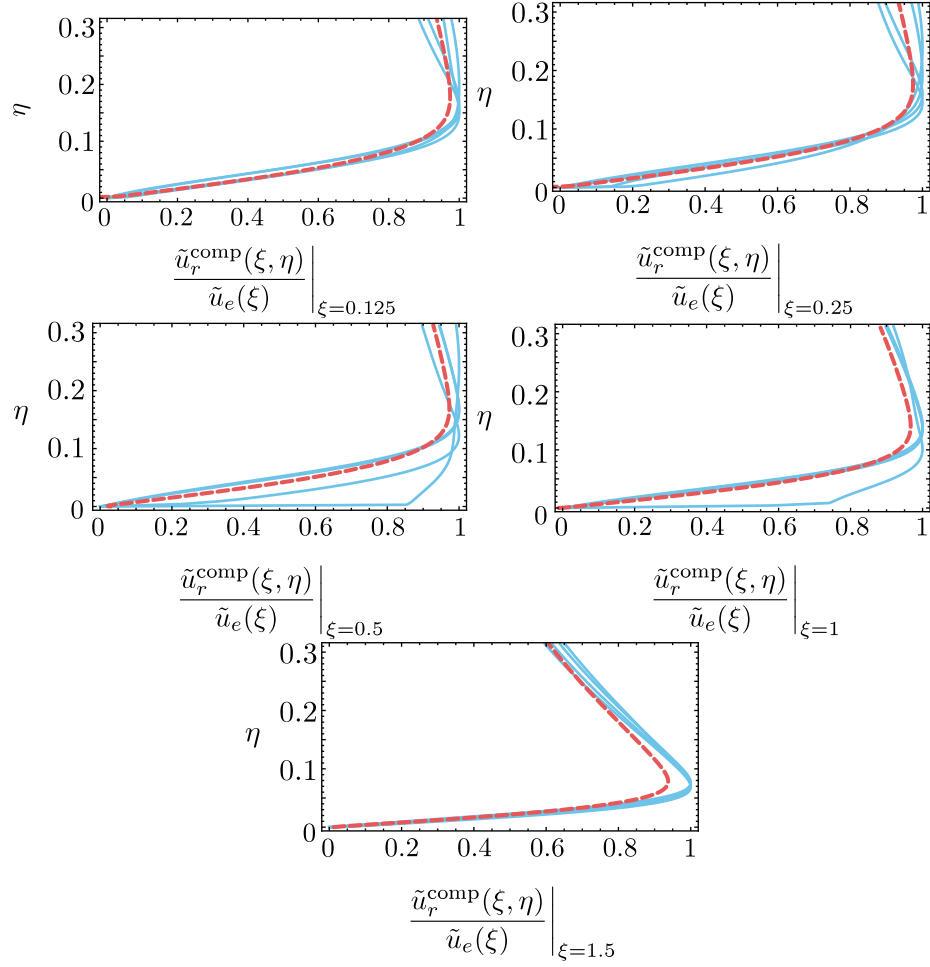


FIGURE B.7 – Same as Fig. 2.22, but for Reynolds number $Re = 500$. Important deviations are due to bubble entrapment induced by rolling motion of the drop for short time.

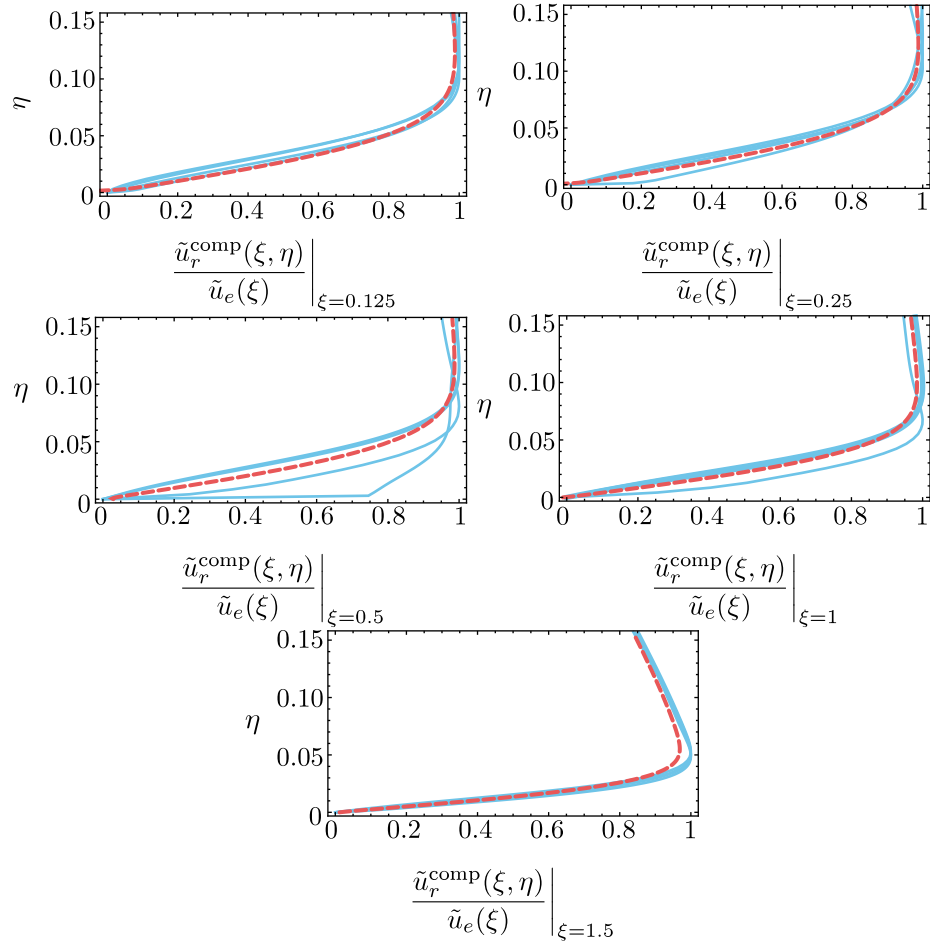


FIGURE B.8 – Same as Fig. 2.22, but for Reynolds number $\text{Re} = 1250$. Important deviations are due to bubble entrapment induced by rolling motion of the drop for short time.

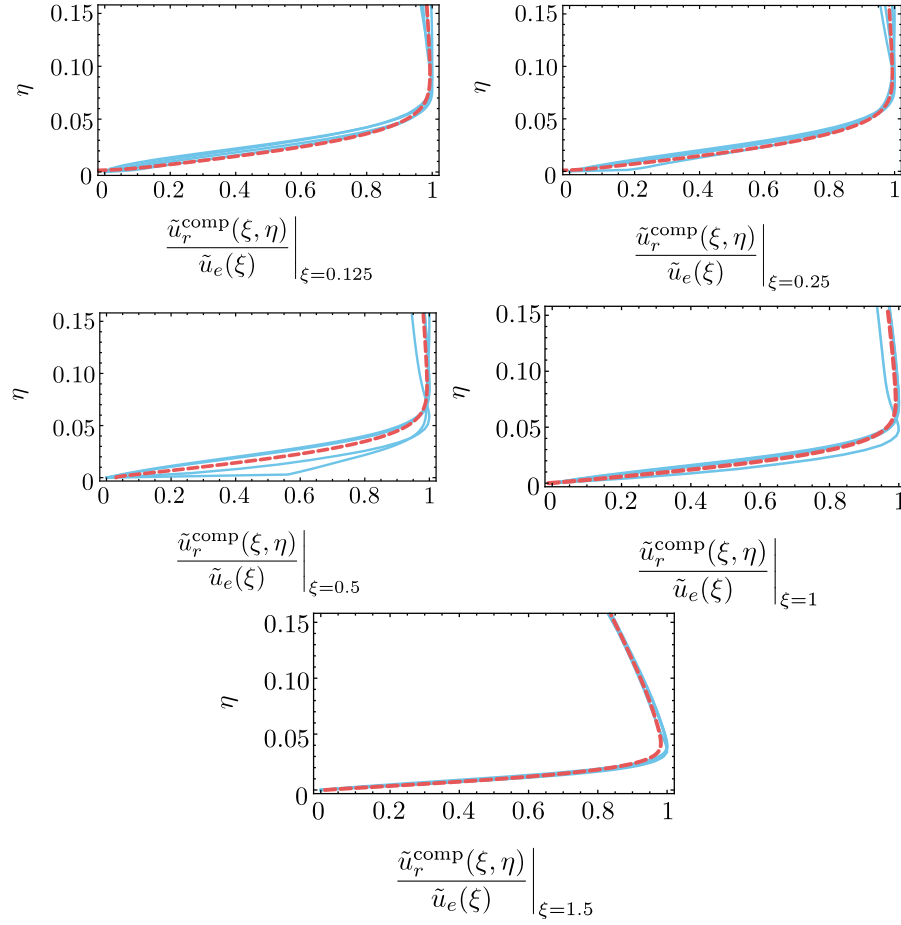


FIGURE B.9 – Same as Fig. 2.22, but for Reynolds number $Re = 2500$. Important deviations are due to bubble entrapment induced by rolling motion of the drop for short time.

B.3 Conclusion

By performing extra *Gerris* simulations we checked that numerical solutions of the radial velocity rescaled in the self-similar space for the inviscid case and time evolution of the pressure at the contact point do not depend on the Reynolds number as expected. We also deduced that theoretical composite solution (equation (2.73)) encompassing both inviscid and viscous terms remains accurate even for quite low Reynolds number.

Annexe C

Problèmes d'impact en deux dimensions

In this appendix we present the resolution of some examples of two-dimensional impact problems by using several methods. In general we will give priority to the one transposables to three-dimensional cases.

C.1 Resolution by complex analysis

An interesting starting case as shown Fig. C.1 is the motion of an infinitely deep fluid with a free-surface given by $y = \eta(x, t)$ initially at rest generated by moving a vertical plate with constant velocity (Roberts 1987). Such a flow is irrotational and we can

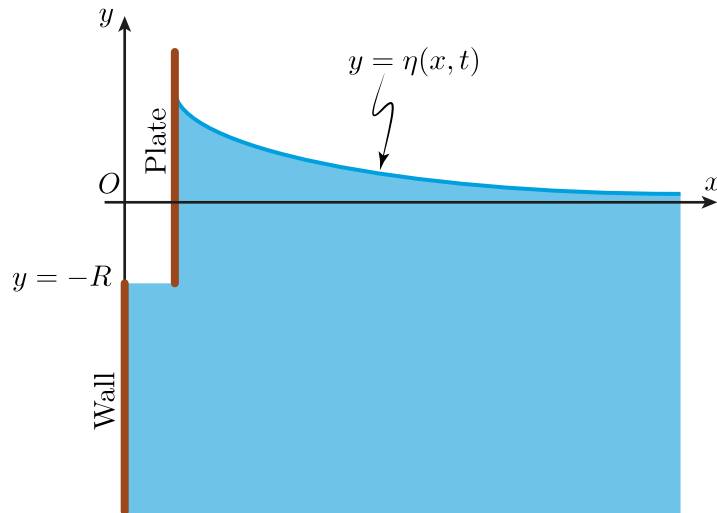


FIGURE C.1 – Free-surface flows generated by moving a vertical plate (Roberts 1987).

assume that it is also incompressible. Then we can define a velocity potential ϕ which is solution of Laplace equation : $\Delta\phi = 0$. An approach to determine the evolution of the flow near the contact line is to use a time decomposition in series of time for ϕ and η (Peregrine 1972) :

$$\phi = \phi_0 + t\phi_1 + \dots, \quad \eta = \eta_0 + t\eta_1 + \dots.$$

The small-time behavior is given by the dominant problem. Then the velocity potential don't have any time dependence at leading order. The vertical plate of height R moves horizontally and we consider that the movement starts at $t = 0$ with the wall at $x = 0$, and fluid is at rest. We obtain, with the analysis of Peregrine, the relation $\Delta\phi_0 = 0$ for all $(x, y) \in \Omega^2$ where Ω is the fluid domain. The uniform velocity of the moving plate leads to the following Neumann boundary condition :

$$\left. \frac{\partial\phi_0}{\partial x} \right|_{x=0} = \begin{cases} \alpha, & -R < y < 0, \\ 0, & y < -R. \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

where α is a real number purely positive with the dimension of a velocity. The Peregrine's decomposition is also applied to the kinematic condition at the free-surface $\frac{DS}{Dt} = 0$ with $S = y - \eta(x, t)$. At leading-order we obtain :

$$\eta_0 = \frac{\partial\phi_0}{\partial y}, \quad \text{when } y = 0. \quad (\text{C.2})$$

At the free surface Bernoulli's equation implies at leading order that the pressure is constant so we have :

$$\phi_0 = 0, \quad \text{when } y = 0. \quad (\text{C.3})$$

Finally we have to solve the equation $\Delta\phi_0 = 0$ for all $(x, y) \in \Omega$ with the boundary conditions (C.1), (C.2) and (C.3). The logarithmic behavior of the displacement is determined by Roberts with complex analysis. The idea is to calculate the complex velocity by distributing sources along the wall and images above $y = 0$:

$$\bar{q}_0 = \int_{-R}^0 \left(\frac{D}{2\pi(z - ia)} - \frac{D}{2\pi(z + ia)} \right) da,$$

where $z = x + iy$ and the source strength on the wall is $D = -2 \left. \frac{\partial\phi_0}{\partial x} \right|_{x=0}$. Moreover $\bar{q}_0 = u_0 - iv_0$, hence the leading-order free surface displacement is given by :

$$\eta_0(x, 0) = \frac{\alpha}{\pi} \log \left(1 + \frac{R^2}{x^2} \right). \quad (\text{C.4})$$

The boundary conditions in this case lead to a logarithmic behavior for the short-time position of the free-surface in the vicinity of the contact line.

In the case where we have to solve a similar problem with an additional border at the bottom in $y = -R$ with a Neumann condition $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$, we need to symmetrize the solution of Roberts by this new line. The idea is to use an infinity of images along the x -axis. We calculate the complex velocity with the image by the line $y = -R$ of the distribution of source along the wall and its image. And by induction, we calculate the complex velocity with the image by the line $y = -nR$ and $y = nR$ where n is an odd number and we sum all of these contributions :

$$\bar{q}_0 = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^R \left(\frac{1}{z + ia} - \frac{1}{z - ia} + \frac{1}{z + 2iR - ia} - \frac{1}{z + 2iR + ia} + \dots \right) da$$

Then we determine the position of the free-surface by identification :

$$\eta_0(x, 0) = \frac{\alpha}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \operatorname{Im} \left(i \log \left(1 + \frac{R^2}{(x + 2ikR)^2} \right) \right). \quad (\text{C.5})$$

Finally this variation also involves a logarithmic singularity near the contact line. However complex analysis can not be use for a three dimensional problem. From now we will solve this kind of problem with methods involving only real analysis in order to transpose it for three-dimensional problems.

C.2 Resolution by Fourier analysis

In the context of impact problems, the pressure impulse P defined in chapter 4 may be related to ϕ , the harmonic velocity potential associated with impact by the relation $P = -\rho\phi$ (Batchelor 1967). Then we deduce that the problem studied by Roberts (1987) is analogous to the impact of a wave on a dam studied in two dimensions by Cooker et Peregrine (1995). By using the pressure impulse theory and Fourier analysis, those last determined an analytical solution for the vertical component of the impact velocity of the wave, analogous to the position of the free-surface of the problem of Roberts if we add a Neumann condition at the bottom of the domain. The model used by Cooker et Peregrine is shown Fig. C.2 where the upper part of the fluid domain, representing a wave, impacts a wall on a fraction μ of its total height. In the case where the length of the wave is infinite, Cooker et Peregrine (1995) obtained the following expression for the vertical component of the velocity after impact :

$$|v_{\text{impact}}(x, y)| = 2U_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\mu\lambda_n) - 1}{\lambda_n} \cos\left(\frac{\lambda_n y}{R}\right) e^{-\frac{\lambda_n x}{R}},$$

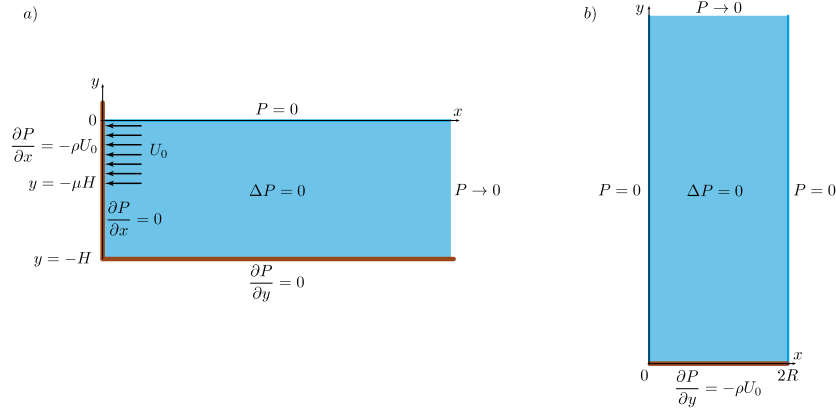


FIGURE C.2 – a) : Impact of a semi-infinite wave on a fraction μ of the height of a dam studied by [Cooker et Peregrine \(1995\)](#). A condition of symmetry given by a Neumann boundary condition $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$ is imposed at the bottom of the fluid domain. b) : Modelisation of the impact of a semi-infinite rectangle by analogy with the impact of a wave on a dam. In this case we have the Dirichlet boundary condition $P = 0$ on the right side.

with $\lambda_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi$. Note that there is a typo in Cooker-Peregrine paper. A factor -2 is lacking in the equation (4.1). With $x = R\bar{x}$, $y = R\bar{y}$ and $v_{impact} = U_0 \bar{v}_{impact}$, we have :

$$|\bar{v}_{impact}(\bar{x}, \bar{y})| = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\mu \lambda_n) - 1}{\lambda_n} \cos(\lambda_n \bar{y}) e^{-\lambda_n \bar{x}}. \quad (C.6)$$

By replacing the Neumann condition at the bottom of the fluid domain by a Dirichlet condition $P = 0$ and choosing $\mu = 1$ we can model the impact of a semi-infinite rectangle on a solid substrate. By switching axis, as shown Fig. C.2 right, we deduced from the previous solution and a symmetry argument that the horizontal impact velocity is given by :

$$\bar{v}_{impact}(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{cases} -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n \bar{y}}}{\lambda_n} \cos(\lambda_n \bar{x}), & \forall (\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega_1 \setminus (0, 0), \\ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n \bar{y}}}{\lambda_n} \cos(\lambda_n (2 - \bar{x})), & \forall (\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega_2 \setminus (2, 0). \end{cases} \quad (C.7a)$$

with $\Omega_1 = [0, 1] \times \mathbb{R}_+$ and $\Omega_2 = [1, 2] \times \mathbb{R}_+$. The pressure field inside the fluid domain could be also expressed in a similar way :

$$\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{cases} 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n \bar{y}}}{\lambda_n^2} \sin(\lambda_n \bar{x}), & \forall (\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega_1, \\ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n \bar{y}}}{\lambda_n^2} \sin(\lambda_n (2 - \bar{x})), & \forall (\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega_2. \end{cases} \quad (C.8a)$$

We represent Fig. C.3 the pressure field and the horizontal impact velocity obtained with previous analytical solutions. The height of the domain is large enough to avoid

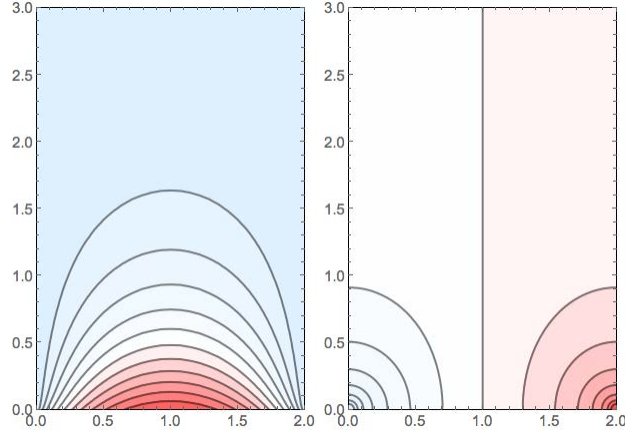


FIGURE C.3 – Left : Isovalues of the impulse pressure field. We notice that the maximum is located at the center of the wall. Right : Isovalues of the horizontal velocity field with a singular behavior in the corner due to mixed boundary conditions at this point.

confinement effects in order to be consistent with the hypothesis of semi-infinity. The maximum value of the pressure impulse occurs at the center of the rectangle on the wall while the horizontal velocity is singular in the corner.

[Cooker et Peregrine \(1995\)](#) shown in their appendix with complex analysis that the singularity near the wall is logarithmic ($\bar{v}_{impact}(0, \bar{y}) \sim -\frac{2}{\pi} \log(\bar{y})$) with a different method than Roberts. We consider now the solution corresponding to $1 \leq \bar{x} \leq 2$ to determine the nature of the singularity. In particular we study the solution along the free surface $\bar{x} = 2$. Hence the horizontal component of the velocity field is given by :

$$\bar{v}_{impact}(2, \bar{y}) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n \bar{y}}}{\lambda_n}. \quad (C.9)$$

Up to this point, we have completely followed the analysis of [Cooker et Peregrine](#) and [Roberts](#). However contrary to these author we want to determine the nature of the singularity at the corner with methods involving real analysis in order to transpose it for three-dimensional problem.

The idea is to write differently \bar{v}_{impact} and use the power series expansion of the exponential function :

$$\begin{aligned} \bar{v}_{impact}(2, \bar{y}) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n}}{\lambda_n} e^{-\lambda_n(\bar{y}-1)} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n}}{\lambda_n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_n(\bar{y}-1))^k}{k!} \right) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n}}{\lambda_n} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_n^{k-1} e^{-\lambda_n}}{(k-1)!} \right) \frac{(-1)^{k-1}}{k} (\bar{y}-1)^k. \end{aligned}$$

This allows us to extract $\frac{(-1)^{k-1}}{k} (\bar{y} - 1)^k$ which is the general terms of power expansion series of $\log(\bar{y})$. For all $k \geq 1$, the following series :

$$a_k := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^{k-1} e^{-\lambda_n}}{(k-1)!}$$

are convergent. In particular, we have :

$$a_0 := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n}}{\lambda_n} = \frac{2}{\pi} \text{Argth} \left(e^{-\frac{\pi}{2}} \right)$$

because $a_0 = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e^{-\frac{\pi}{2}})^{2n+1}}{2n+1}$ which corresponds to the power expansion series of the function Argth . With these notation, we have :

$$\bar{v}_{\text{impact}}(2, \bar{y}) = 2a_0 - 2 \sum_{k \geq 1} a_k \frac{(-1)^{k-1}}{k} (\bar{y} - 1)^k.$$

We can show by induction that for $k \geq 1$, a_k is :

$$a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} S^{(k-1)}(1)$$

where S is the sum of the function series defined by :

$$S(\bar{y}) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda_n \bar{y}} = \frac{e^{\frac{\pi \bar{y}}{2}}}{e^{\pi \bar{y}} - 1} = \frac{\text{cosech} \left(\frac{\pi \bar{y}}{2} \right)}{2}.$$

We can use this sum because the series of partial sums $S_n := \sum_{k=1}^n e^{-\lambda_k \bar{y}}$ converges pointwise to S for all $y \in]0, 1]$. This sum is a geometric series which is easy to compute. So we obtain each coefficients a_k by successive derivation of S . It is difficult to obtain a better result for a_k because it involves the n -th derivative of the function cosech which do not have an explicit formula. Indeed the derivative of cosech is $-\text{cosech} \coth$ so we can say that the n th derivative of cosech is a polynomial of the two variable cosech and \coth but we can not compute the coefficients of this polynomial. However we notice that a_k converge very quickly to $\frac{1}{\pi}$. All what we can conclude is that the sum may be interpreted as a Riemann approximation of the integral :

$$a_k \sim \frac{1}{\Gamma(k)} \int_1^{\infty} \left[\left(\bar{y} - \frac{1}{2} \right) \pi \right]^{k-1} e^{-(\bar{y}-\frac{1}{2})\pi} d\bar{y} = \frac{\Gamma(k, \frac{\pi}{2})}{\pi \Gamma(k)} \longrightarrow \frac{1}{\pi}.$$

So we introduce the substitution $\varepsilon_k = a_k - \frac{1}{\pi}$ and we write :

$$\begin{aligned}\bar{v}_{\text{impact}}(2, \bar{y}) &= 2a_0 - 2 \sum_{k \geq 1} \left(\varepsilon_k + \frac{1}{\pi} \right) \frac{(-1)^{k-1}}{k} (\bar{y} - 1)^k \\ &= 2a_0 - \frac{2}{\pi} \log(\bar{y}) - 2 \sum_{k \geq 1} \varepsilon_k \frac{(-1)^{k-1}}{k} (\bar{y} - 1)^k\end{aligned}$$

with $2 \sum_{k \geq 1} \varepsilon_k \frac{(-1)^{k-1}}{k} (\bar{y} - 1)^k = o\left(\frac{2}{\pi} \log(\bar{y})\right)$. This is the result demonstrated by [Cooker et Peregrine](#) but obtained with real analysis methods. In order to solve a similar problem for a three-dimensional configuration, this kind of approach is particularly efficient.

C.3 Resolution by boundary integral method

We propose here to revisit the two-dimensional impact of [Cooker et Peregrine](#) with a hemispherical geometry. This configuration corresponds to a hypothetical half drop impact. However this situation is equivalent to the experiment suggested in chapter 4 by a translation of reference frame.

C.3.1 The boundary integral method

This method is used to solve partial differential equations and gives analytical solutions for simple geometry. It is possible to adapt the method in order to obtain numerical solutions when the shape of the borders become too complex. Furthermore this approach is particularly interesting to solve a Laplace equation. The value of a field in all points of a domain Ω is computed only with its values on the border. We can show, from G a Green function *i.e* such as $\Delta G = \delta$, and using Green Theorem, that for all $\mathbf{x} = (x, y) \in \Omega^2$ ([Pozrikidis 1997, 2002](#); [Bonnet 1995](#)), the value of a field f is :

$$f(\mathbf{x}) = - \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial f}{\partial n}(\boldsymbol{\xi}) \, d\xi \, d\zeta + \int_{\partial\Omega} f(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \, d\xi \, d\zeta \quad (\text{C.10})$$

where $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \zeta) \in \Omega^2$. The unit normal \vec{n} is, by convention, pointing outward Ω . The first integral of the right hand side of this equation is designated by SLP (single layer potential) and the second integral by DLP (double layer potential). When $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, it is slightly different. We can compute f by converging of \mathbf{x} near $\partial\Omega$ but then DLP becomes improper but convergent ([Pozrikidis 1997, 2002](#)). We will use the notation PV on this

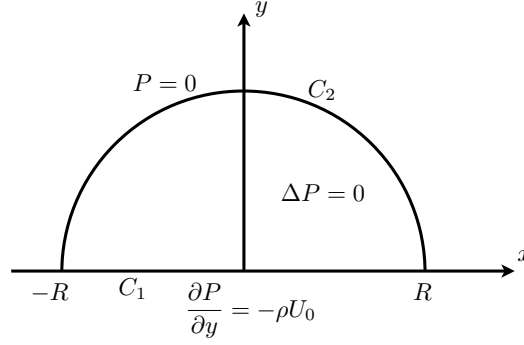


FIGURE C.4 – Modelisation of the two dimensional impact of a half drop of radius R on the plane $y = 0$. We have Neumann boundary condition $\frac{\partial P}{\partial y} = -\rho U_0$ on the support C_1 and Dirichlet boundary condition $P = 0$ at the free surface C_2 .

integral to indicate its improper nature. Then (C.10) becomes for all $\mathbf{x} \in \partial\Omega$:

$$f(\mathbf{x}) = -2 \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial f}{\partial n}(\boldsymbol{\xi}) d\xi d\zeta + 2 \int_{\partial\Omega}^{PV} f(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\xi d\zeta \quad (\text{C.11})$$

C.3.2 Application to half drop impact

As [Cooker et Peregrine](#) we are interested in the determination of the impact velocity along the wall. By using the same pressure impulse formalism, this velocity is given by $v_{\text{impact}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}$ in $y = 0$ (see Fig. C.4). The border of the domain is designated by $C = C_1 \cup C_2$ with $C_1 = \{(x, y) | -R \leq x \leq R, y = 0\}$ and $C_2 = \{(x, y) | x^2 + y^2 = R^2, y > 0\}$. Then we have to compute $\frac{\partial P}{\partial x}(\mathbf{x})$ for $\mathbf{x} \in C_1$. We note that we can calculate the derivative of the righthand side of equation C.11 with respect to the components of $\mathbf{x} = (x, y)$ by a permutation of the integral and the derivative so long as the point \mathbf{x} lies inside the solution domain away from the boundaries ([Pozrikidis 1997, 2002](#)). In other words we can not permute the two operators to determine the velocity along the wall and it is necessary to first calculate the integral and then the derivative of the result.

In order to compute the pressure or the velocity we have to choose an appropriate Green function to this problem. In particular this one have to respect some conditions of symmetry. We define two kinds of Green functions for a given $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$:

— The Green function of first kind is defined by :

$$\forall \boldsymbol{\xi} \in C, \quad G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = 0.$$

— The Green function of second kind is defined by :

$$\forall \boldsymbol{\xi} \in C, \quad \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = 0.$$

We have to choose for all part of the domain a Green function of first kind or second kind. Because $P = 0$ on C_2 , DLP is equal to zero on this border. If we can find a Green function of first kind on C_2 then G will be equal to zero on this part of the domain and SLP will be equal to zero too on C_2 . Hence the contribution given by this border in the computation of P will be zero. Similarly we know the normal derivative of P on C_1 then we choose a Green function of the second kind and we deduce that DLP will be zero on this border. Finally for all $\mathbf{x} \in C_1$ we have :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(\mathbf{x}) = -2 \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_1} G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial P}{\partial \zeta}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \quad (\text{C.12})$$

Therefore we need in this case a Green function which verify the previous boundary conditions on the border and which is symmetric on (x, y) and (ξ, ζ) . An appropriate choice is given by the following function defined for a given $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ by :

$$\forall \boldsymbol{\xi} \in \bar{\Omega}, \quad G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{2\pi} \log r + \frac{1}{2\pi} \log \left(\frac{|\boldsymbol{\xi}|}{R} \hat{r} \right). \quad (\text{C.13})$$

with $r = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \zeta)^2}$. \hat{r} is the distance between \mathbf{x} and the image of $\boldsymbol{\xi}$ which is the inverse of $\boldsymbol{\xi}$ with respect of the unit circle. Formally we have $\hat{r} = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}^*|$ and $\boldsymbol{\xi}^* = \frac{R^2}{|\boldsymbol{\xi}|^2} \boldsymbol{\xi}$. Consequently for all $\mathbf{x} \in C_1$:

$$v_{\text{impact}}(\mathbf{x}) = -\frac{U_0}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-R}^R \left(-\log \left(\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \zeta)^2} \right) + \log \left(\frac{\sqrt{R^4 - 2R^2(x\xi + y\zeta) + (x^2 + y^2)(\xi^2 + \zeta^2)}}{R} \right) \right) d\xi.$$

Moreover $\mathbf{x} \in C_1$ as well ξ , then we have $y = \zeta = 0$. Finally we obtain for all $\mathbf{x} \in C_1$:

$$v_{\text{impact}}(\mathbf{x}) = -\frac{U_0}{\pi} \left(-\frac{2R}{x} + \left(1 + \frac{R^2}{x^2} \right) \log \left(\frac{R+x}{R-x} \right) \right) \quad (\text{C.14})$$

As in [Cooker et Peregrine](#) or its variation the impact velocity has a logarithmic singularity. We conclude that the boundary integral method is a very powerful tool involving real analysis. In appendix C we will use this method to solve the axisymmetric version of this example.

C.4 Conclusion

Inspired by [Cooker et Peregrine \(1995\)](#) and [Roberts \(1987\)](#) we solved several impact problems. For each cases, as shown by these authors we obtained logarithmic singularities

at the contact line. This behavior in the corner is a consequence of the nature of the boundary conditions involved in all those problems ruled by Laplace equation.

The powerful methods exposed in this appendix as Fourier analysis or boundary integral method will be used for the resolution of three-dimensional problems in this thesis.

Annexe D

Solution du problème impulsionnel par la méthode des intégrales de frontières

In this appendix we will determine an alternative formulation for the velocity along the substrate u_r by using the boundary integral method. As shown chapter 4 the impulse problem is given by a Laplace equation for pressure impulse and boundary conditions (4.5) (see Fig. 4.7). In order to determine the slip velocity u_r , we have to find first the solution of the pressure impulse on the plane \mathcal{P} . Concretely we have to find a Green function G which is equal to zero on the surface of the sphere and a normal derivative equal to zero on the plane $z = 0$ (because we know the normal derivative of the pressure on \mathcal{P} and the pressure is equal to zero on \mathcal{S}).

D.1 Determination of the pressure impulse

With such a Green function, we can write for all $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$:

$$P(\mathbf{x}) = -2 \int_{\mathcal{P}} G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial P}{\partial \tau}(\boldsymbol{\xi}) d\xi d\zeta, \quad (\text{D.1})$$

where $\mathbf{x} = (x, y, z)$ and $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \zeta, \tau)$ are two points of the fluid domain $\bar{\Omega}$. An appropriate Green function is given by Jackson (1998), for $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ fixed and $\mathbf{x}^* = \frac{R^2}{|\mathbf{x}|^2} \mathbf{x} \in \bar{\Omega}$:

$$\forall \boldsymbol{\xi} \in \bar{\Omega}, \quad G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4\pi r} - \frac{R}{4\pi|\mathbf{x}|} \frac{1}{\hat{r}} \quad (\text{D.2})$$

with $r = |\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}| = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\zeta - y)^2 + (\tau - z)^2}$ and $\hat{r} = |\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}^*|$. With (D.2) we obtain for all $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$:

$$P(\mathbf{x}) = \frac{\rho U_0}{2\pi} \int_{\mathcal{P}} \left(\frac{1}{r} - \frac{R}{|\mathbf{x}|} \frac{1}{\hat{r}} \right) d\xi d\zeta. \quad (\text{D.3})$$

By using the following substitution in order to work with polar coordinates :

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha, \quad \xi = \sigma \cos \theta, \quad \zeta = \sigma \sin \theta,$$

we integrate equation (D.3) by θ and we obtain for all $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$:

$$I_\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\left[(\sigma + r)^2 - 4r\sigma \cos^2\left(\frac{\theta - \alpha}{2}\right) \right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{R}{|\mathbf{x}|} \frac{1}{\left[\left(\sigma + \frac{R^2}{|\mathbf{x}|^2} r \right)^2 - 4r\sigma \frac{R^2}{|\mathbf{x}|^2} \cos^2\left(\frac{\theta - \alpha}{2}\right) \right]^{\frac{1}{2}}} \right) d\theta.$$

By using the substitutions $k^2 = \frac{4r\sigma}{(r+\sigma)^2}$, $\hat{k}^2 = \frac{4r\sigma R^2}{(r\sigma + R^2)^2}$ and $u = \frac{\theta - \alpha}{2}$, we obtain for all $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$:

$$I_\theta = \frac{4}{r + \sigma} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{[1 - k^2 \cos^2 u]^{\frac{1}{2}}} - \frac{4R}{r\sigma + R^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{[1 - \hat{k}^2 \cos^2 u]^{\frac{1}{2}}}.$$

We recognize elliptic integral of the first kind defined by :

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 u}},$$

then we deduce that I_θ is given for all $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$ by :

$$I_\theta = \frac{4}{r + \sigma} K(k) - \frac{4R}{r\sigma + R^2} K(\hat{k}).$$

Hence, for all $r \in [0, R]$:

$$P(r) = \frac{\rho U_0}{2\pi} \int_0^R I_\theta \sigma d\sigma = \frac{2\rho U_0}{\pi} \int_0^R \left(\frac{K(k)}{r + \sigma} - \frac{RK(\hat{k})}{r\sigma + R^2} \right) \sigma d\sigma. \quad (\text{D.4})$$

With the substitutions $P = \rho U_0 R \bar{P}$, $r = R\bar{r}$ and $\sigma = R\bar{\sigma}$, we obtain the nondimensional form of the pressure impulse along the substrate defined for all $\bar{r} \in [0, 1]$ by :

$$\bar{P}(\bar{r}) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{K(k)}{\bar{r} + \bar{\sigma}} - \frac{K(\hat{k})}{\bar{r}\bar{\sigma} + 1} \right) \bar{\sigma} d\bar{\sigma}, \quad (\text{D.5})$$

with $k^2 = \frac{4\bar{r}\bar{\sigma}}{(\bar{r} + \bar{\sigma})^2}$ and $\hat{k}^2 = \frac{4\bar{r}\bar{\sigma}}{(\bar{r}\bar{\sigma} + 1)^2}$. A representation of this last solution in very good agreement with a numerical solution obtained with **FreeFem++** is represented Fig. D.1. This result shows that the maximum pressure impulse is at the center of the substrate

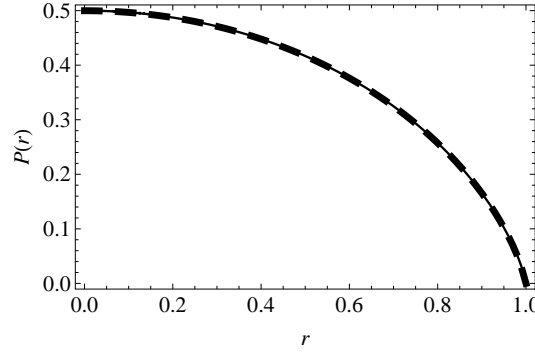


FIGURE D.1 – Representation of the analytic solution (continuous line) of the pressure impulse along the substrate in good agreement with a numerical solution obtained with `freefem++` (dashed line). The maximum of this quantity is located at the center of the solid surface which is consistent with the solution obtained with spherical harmonics.

which is consistent with solutions obtained with spherical harmonics.

D.2 Determination of the velocity along the substrate

By using equations (4.2) and (D.4), we obtain the velocity along the substrate which is given for all $r \in]0, R[$ by :

$$u_r(r) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}(r) = -\frac{2U_0}{\pi} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^R \left(\frac{K(k)}{r+\sigma} - \frac{RK(\hat{k})}{r\sigma+R^2} \right) \sigma \, d\sigma.$$

Then the Leibniz integral rule implies that :

$$u_r(r) = -\frac{2U_0}{\pi} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{K(k)}{r+\sigma} - \frac{RK(\hat{k})}{r\sigma+R^2} \right) \sigma \, d\sigma. \quad (\text{D.6})$$

As shown in the previous section k and \hat{k} are function of r so $\frac{\partial K}{\partial r}(k) = \frac{\partial k}{\partial r} \frac{\partial K}{\partial k}(k)$, with :

$$\frac{\partial K}{\partial k}(k) = \frac{E(k)}{k(1-k^2)} - \frac{K(k)}{k},$$

where $E(k)$ the elliptic integral of second kind :

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} \, du.$$

We note respectively $\frac{\partial K}{\partial r}(k)$ and $\frac{\partial K}{\partial r}(\hat{k})$ by \mathcal{K} and $\hat{\mathcal{K}}$. Moreover we have :

$$\frac{\partial k}{\partial r} = \frac{(\sigma - r)\sqrt{r\sigma}}{r(r+\sigma)^2} \quad \text{and} \quad \frac{\partial \hat{k}}{\partial r} = \frac{R(R^2 - r\sigma)\sqrt{r\sigma}}{r(r\sigma + R^2)^2}.$$

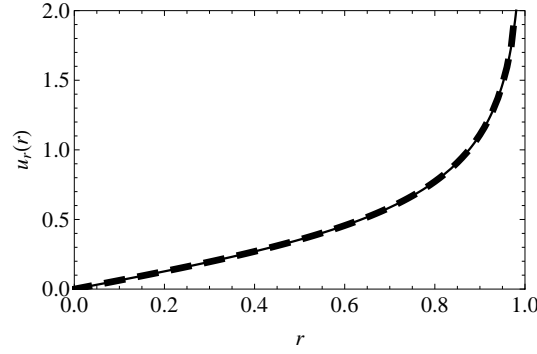


FIGURE D.2 – Superposition of the analytic solution (continuous line) and the numerical solution obtained with **freefem++** (dashed line) of the radial component of the velocity along the substrate. The two solutions are in very good agreement ;

Consequently we deduce u_r for all $r \in]0, R[$ with equation (D.6) :

$$\begin{aligned} u_r(r) &= -\frac{2U_0}{\pi} \int_0^R \left(\frac{\mathcal{K}(k)}{r+\sigma} - \frac{K(k)}{(r+\sigma)^2} - \frac{R\hat{\mathcal{K}}(\hat{k})}{r\sigma+R^2} + \frac{RK(\hat{k})\sigma}{(r\sigma+R^2)^2} \right) \sigma d\sigma \\ &= -\frac{2U_0}{\pi} \int_0^R \left(\frac{E(k)}{2r(\sigma-r)} - \frac{K(k)}{2r(\sigma+r)} - \frac{RE(\hat{k})}{2r(R^2-r\sigma)} + \frac{RK(\hat{k})}{2r(r\sigma+R^2)} \right) \sigma d\sigma. \end{aligned}$$

With the same substitutions used with the pressure impulse and $u_r = U_0 \bar{u}_r$ we obtain the nondimensional form of the radial velocity defined for all $\bar{r} \in]0, 1[$ by :

$$\bar{u}_r(\bar{r}) = -\frac{2}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{E(k)}{2\bar{r}(\bar{\sigma}-\bar{r})} - \frac{K(k)}{2\bar{r}(\bar{\sigma}+\bar{r})} - \frac{E(\hat{k})}{2\bar{r}(1-\bar{r}\bar{\sigma})} + \frac{K(\hat{k})}{2\bar{r}(\bar{r}\bar{\sigma}+1)} \right) \bar{\sigma} d\bar{\sigma}.$$

The nondimensional form of the velocity along the substrate is represented Fig. D.2 which is exactly the same than the solution obtained with spherical harmonics (see Fig. 4.9). However for a three dimensional problem as the one who want to solve, the calculus of the pressure and the velocity fields are more complicated with the boundary integral method because it is necessary to use elliptic integral. Then for instance the determination of the nature of the singularity of the velocity close to the contact line becomes more complex.

D.3 Conclusion

By using the boundary integral method we found an integral representation of the slip velocity u_r . Though the solution obtained in this appendix is exactly the same than the one determined with spherical harmonics, it is less convenient to use it because elliptic integral are involved. Therefore the determination of the nature of the singularity or the

structure of stagnation point flow is much harder to obtain. This is the reason why we used spherical harmonics solutions in chapter 4.

Bibliographie

- M. ALLOUCHE, I. A. FRIGAARD et G. SONA : Static wall layers in the displacement of two visco-plastic fluids in a plane channel. *Journal of Fluid Mechanics*, 424:243–277, 12 2000.
- A. ANTKOWIAK, B. AUDOLY, C. JOSSE RAND, S. NEUKIRCH et M. RIVETTI : Instant fabrication and selection of folded structures using drop impact. *Proc. Natl Acad. Sci. U.S.A.*, 108(26):10400–10404, 2011.
- A. ANTKOWIAK, N. BREMOND, S. LE DIZÈS et E. VILLERMAUX : Short-term dynamics of a density interface following an impact. *Journal of Fluid Mechanics*, 577(1):241–250, 2007.
- D. ATTINGER, C. MOORE, A. DONALDSON, A. JAFARI et H. A. STONE : Fluid dynamics topics in bloodstain pattern analysis : Comparative review and research opportunities. *Forensic Science International*, 231(1–3):375 – 396, 2013.
- R. A. BAGNOLD : Interim report on wave-pressure research. *Journ. of ICE*, 12:202–226, 1939.
- N. J. BALMFORTH, I. A. FRIGAARD et G. OVARLEZ : Yielding to stress : Recent developments in viscoplastic fluid mechanics. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 46:121–146, 2014.
- D. BARTOLO, C. JOSSE RAND et D. BONN : Singular jets and bubbles in drop impact. *Phys. Rev. Lett.*, 96:124501, Mar 2006.
- G. K. BATCHELOR : *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, 1967.
- V. BERGERON, D. BONN, J. Y. MARTIN et L. VOVELLE : Controlling droplet deposition with polymer additives. *Nature*, 405(6788):772–775, 2000.
- E. C. BINGHAM : An investigation of the laws of plastic flow. *Bulletin of the Bureau of Standards*, 13(2), 1916.

- E. C. BINGHAM : *Fluidity and plasticity*. McGraw-Hill (New York), 1922.
- B. C. BLACKWELL, M. E. DEETJEN, J. E. GAUDIO et R. H. EWOLDT : Sticking and splashing in yield-stress fluid drop impacts on coated surfaces. *Physics of Fluids (1994-present)*, 27(4):-, 2015.
- T. D. BLAKE, M. BRACKE et Y. D. SHIKHMURZAEV : Experimental evidence of nonlocal hydrodynamic influence on the dynamic contact angle. *Physics of Fluids (1994-present)*, 11(8):1995–2007, 1999.
- L. BOCQUET : The physics of stone skipping. *American Journal of Physics*, 71:150, 2003.
- D. BONN, J. EGGERS, J. INDEKEU, J. MEUNIER et E. ROLLEY : Wetting and spreading. *Rev. Mod. Phys.*, 81:739–805, 2009.
- M. BONNET : *Equations intégrales et éléments de frontières*. CNRS Editions/Eyrolles, 1995.
- J. BOUSSINESQ : Théorie des expériences de savart, sur la forme que prend une veine liquide apres s’etre choquée contre un plan circulaire. *CR Acad. Sci. Paris*, 69(45):45–48, 1869a.
- J. BOUSSINESQ : Théorie des expériences de savart, sur la forme que prend une veine liquide apres s’etre choquée contre un plan circulaire. *CR Acad. Sci. Paris*, 128-131 (45):128–131, 1869b.
- F. P. BOWDEN et J. E. FIELD : The brittle fracture of solids by liquid impact, by solid impact, and by shock. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 282(1390):331–352, 1964.
- D. L. BROWN, R. CORTEZ et M. L. MINION : Accurate projection methods for the incompressible navier–stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 168(2):464–499, 2001.
- P. BRUNET, C. CLANET et L. LIMAT : Transonic liquid bells. *Physics of Fluids*, 16 (7):2668–2678, 2004.
- M. BRUST, C. SCHAEFER, R. DOERR, L. PAN, M. GARCIA, P. ARRATIA et C. WAGNER : Rheology of human blood plasma : Viscoelastic versus newtonian behavior. *Physical Review Letters*, 110(7):078305, 2013.
- W. E. BYERLY : *An Elementary Treatise on Fourier’s Series*. GINN & COMPANY, 1893.

- S. CHANDRA et C. T. AVEDISIAN : On the collision of a droplet with a solid surface. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 432(1884):13–41, 1991.
- Q. CHEN, E. RAMÉ et S. GAROFF : The velocity field near moving contact lines. *J. Fluid Mech.*, 337:49–66, 1997.
- X. CHENG, G. VARAS, D. CITRON, H. M. JAEGER et S. R. NAGEL : Collective behavior in a granular jet : Emergence of a liquid with zero surface tension. *Physical review letters*, 99(18):188001, 2007.
- C. CLANET : Dynamics and stability of water bells. *Journal of Fluid Mechanics*, 430:111–147, 2001.
- C. CLANET : Waterbells and liquid sheets. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 39:469–496, 2007.
- C. CLANET, F. HERSEN et L. BOCQUET : Secrets of successful stone-skipping. *Nature*, 427(6969):29–29, 2004.
- R. COINTE et J.-L. ARMAND : Hydrodynamic impact analysis of a cylinder. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, 109:237–243, 1987.
- M. J. COOKER et D. H. PEREGRINE : Pressure-impulse theory for liquid impact problems. *Journal of Fluid Mechanics*, 297:193–214, 1995.
- R. G. COX : The dynamics of the spreading of liquids on a solid surface. part 1. viscous flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 168:169–194, 1986.
- J. L. R. D’ALEMBERT : *Essai d’une nouvelle theorie de la resistance des fluides*. Paris, 1752.
- J.-S. DARROZÈS et C. FRANÇOIS : *Mécanique Des Fluides Incompressibles (Lecture Notes in Physics)*. Springer-Verlag, 1982. ISBN 0387115781.
- P.-G. DE GENNES : Wetting : statics and dynamics. *Reviews of modern physics*, 57(3):827, 1985.
- P.-G. de GENNES, F. BROCHARD-WYART et D. QUÉRÉ : *Gouttes, bulles, perles et ondes*. Belin, 2002.
- E. de JONQUIÈRES : Sur le ricochet des projectiles sphériques à la surface de l’eau. *Comptes Rendus des Séances de l’Académie des Sciences. Paris.*, 97:1278–1281, 1883.
- S. DEBOEUF, P. GONDRET et M. RABAUD : Dynamics of grain ejection by sphere impact on a granular bed. *Phys. Rev. E*, 79:041306, 2009.

- R. D. DEEGAN, O. BAKAJIN, T. F. DUPONT, G. HUBER, S. R. NAGEL et T. A. WITTEN : Capillary flow as the cause of ring stains from dried liquid drops. *Nature*, 389(6653): 827–829, 1997.
- J. DERVAUX et L. LIMAT : Contact lines on soft solids with uniform surface tension : analytical solutions and double transition for increasing deformability. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 471(2176), 2015.
- M. M. DRISCOLL, C. S. STEVENS et S. R. NAGEL : Thin film formation during splashing of viscous liquids. *Phys. Rev. E*, 82:036302, 2010.
- L. DUCHEMIN et C. JOSSE RAND : Curvature singularity and film-skating during drop impact. *Physics of Fluids (1994-present)*, 23(9):091701, 2011.
- C. DUEZ, C. YBERT, C. CLANET et L. BOCQUET : Making a splash with water repellency. *Nature physics*, 3(3):180–183, 2007.
- E. B. DUSSAN V. et S. H. DAVIS : On the motion of a fluid-fluid interface along a solid surface. *Journal of Fluid Mechanics*, 65:71–95, 8 1974.
- H. E. EDGERTON et J. R. KILLIAN : *Flash! : Seeing the unseen by ultra high-speed photography*. CT Branford Co., 1954.
- J. EGGERS, M. A. FONTELOS, C. JOSSE RAND et S. ZALESKI : Drop dynamics after impact on a solid wall : Theory and simulations. *Physics of Fluids (1994-present)*, 22 (6):–, 2010.
- J. ELLIOTT et F. SMITH : Ice formation on a smooth or rough cold surface due to the impact of a supercooled water droplet. *Journal of Engineering Mathematics*, p. 1–30, 2015.
- W. D. ELLISON : Some effects of raindrops and surface-flow on soil erosion and infiltration. *Eos, Transactions American Geophysical Union*, 26(3):415–429, 1945.
- J. ELLOWITZ, H. TURLIER, N. GUTTENBERG, W. W. ZHANG et S. R. NAGEL : Still water : Dead zones and collimated ejecta from the impact of granular jets. *Phys. Rev. Lett.*, 111:168001, Oct 2013.
- O. G. ENGEL : Waterdrop collisions with solid surfaces. *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, 54 (5):281–298, 1955.
- J. E. FIELD, J. P. DEAR et J. E. OGRE N : The effects of target compliance on liquid drop impact. *Journal of Applied Physics*, 65(2):533–540, 1989.
- M. FORTIN et R. GLOWINSKI : *Augmented Lagrangian methods*. North-Holland, 1983.

- D. J. FURBISH, K. K. HAMNER, M. SCHMEECKLE, M. N. BOROSUND et S. M. MUDD : Rain splash of dry sand revealed by high-speed imaging and sticky paper splash targets. *Journal of Geophysical Research : Earth Surface*, 112(F1):n/a–n/a, 2007.
- M. GAVAISES, A. THEODORAKAKOS et G. BERGELES : Modeling wall impaction of diesel sprays. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 17(2):130 – 138, 1996.
- E. GHABACHE : *Surface libre hors équilibre : de l'effondrement de cavités aux jets étirés*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2015.
- É. GHABACHE, T. SÉON et A. ANTKOWIAK : Liquid jet eruption from hollow relaxation. *Journal of Fluid Mechanics*, 761:206–219, 12 2014.
- T. GILET et L. BOUROUBA : Rain-induced ejection of pathogens from leaves : Revisiting the hypothesis of splash-on-film using high-speed visualization. *Integrative and Comparative Biology*, 54(6):974–984, 2014.
- J. GLASHEEN et T. MCMAHON : A hydrodynamic model of locomotion in the basilisk lizard. *Nature*, 380(6572):340–341, 1996.
- F. HECHT : New development in freefem++. *J. Numer. Math.*, 20(3-4):251–265, 2012.
- H. HERTZ : Ueber die berührung fester elastischer körper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 92:156–171, 1882.
- P. D. HICKS et R. PURVIS : Air cushioning and bubble entrapment in three-dimensional droplet impacts. *Journal of Fluid Mechanics*, 649:135–163, 4 2010.
- S. D. HOWISON, J. R. OCKENDON, J. M. OLIVER, R. PURVIS et F. T. SMITH : Droplet impact on a thin fluid layer. *J. Fluid Mech.*, 542:1–23, 2005.
- S. D. HOWISON, J. R. OCKENDON et S. K. WILSON : Incompressible water-entry problems at small deadrise angles. *J. Fluid Mech.*, 222:215–230, 1991.
- S. HOWISON, J. OCKENDON et J. OLIVER : Deep- and shallow-water slamming at small and zero deadrise angles. *Journal of Engineering Mathematics*, 42(3-4):373–388, 2002.
- S. T. HSIEH et G. V. LAUDER : Running on water : Three-dimensional force generation by basilisk lizards. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 101(48):16784–16788, 2004.
- J. D. JACKSON : *Classical electrodynamics*. Wiley, 1998.
- Z. JIAN : *Drop impact on solid : Splashing transition and effect of the surrounding gas*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2014.

- W. JOHNSON : The ricochet of spinning and non-spinning spherical projectiles, mainly from water. part ii : An outline of theory and warlike applications. *International Journal of Impact Engineering*, 21(1–2):25 – 34, 1998.
- C. JOSSERAND et S. THORODDSEN : Drop impact on a solid surface. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 48(1):null, 2016.
- C. JOSSERAND, P. RAY et S. ZALESKI : Droplet impact on a thin liquid film : anatomy of the splash. *Manuscript in preparation*, 2015.
- C. JOSSERAND et S. ZALESKI : Droplet splashing on a thin liquid film. *Physics of Fluids*, 15(6):1650–1657, 2003.
- E. KIM et J. BAEK : Numerical study of the parameters governing the impact dynamics of yield-stress fluid droplets on a solid surface. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 173–174(0):62 – 71, 2012.
- S. KISTLER : *Hydrodynamics of wetting in : Wettability*. Marcel Dekker, New York, 1993.
- J. M. KOLINSKI, L. MAHADEVAN et S. M. RUBINSTEIN : Drops can bounce from perfectly hydrophilic surfaces. *EPL (Europhysics Letters)*, 108(2):24001, 2014.
- J. M. KOLINSKI, S. M. RUBINSTEIN, S. MANDRE, M. P. BRENNER, D. A. WEITZ et L. MAHADEVAN : Skating on a film of air : drops impacting on a surface. *Physical Review Letters*, 108(7):074503, 2012.
- A. KOROBKIN : Second-order wagner theory of wave impact. *Journal of Engineering Mathematics*, 58(1-4):121–139, 2007.
- N. LAAN, K. G. de BRUIN, D. BARTOLO, C. JOSSERAND et D. BONN : Maximum diameter of impacting liquid droplets. *Phys. Rev. Applied*, 2:044018, 2014.
- P.-Y. LAGRÉE, L. STARON et S. POPINET : The granular column collapse as a continuum : validity of a two-dimensional Navier-Stokes model with a $\mu(I)$ -rheology. *J. Fluid Mech.*, 686:378–408, 2011.
- P.-Y. LAGRÉE : A triple deck model of ripple formation and evolution. *Physics of Fluids (1994-present)*, 15(8):2355–2368, 2003.
- P.-Y. LAGRÉE : *Interactive Boundary Layers in : Asymptotic Methods in Fluid Mechanics : Survey and Recent Advances (CISM International Centre for Mechanical Sciences)*. Springer, 2010. ISBN 3709104076.

- G. LAGUBEAU, M. A. FONTELOS, C. JOSSEAND, A. MAUREL, V. PAGNEUX et P. PETIT-JEANS : Spreading dynamics of drop impacts. *Journal of Fluid Mechanics*, 713:50–60, 12 2012. ISSN 1469-7645.
- H. LAMB : *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, 1932.
- G. N. LANCE et R. L. PERRY : Water bells. *Proceedings of the Physical Society. Section B*, 66(12):1067, 1953.
- A. LATKA, A. STRANDBURG-PESHKIN, M. M. DRISCOLL, C. S. STEVENS et S. R. NAGEL : Creation of prompt and thin-sheet splashing by varying surface roughness or increasing air pressure. *Phys. Rev. Lett.*, 109:054501, 2012.
- M. LAVRENTIEV et B. CHABAT : *Effets hydrodynamiques et modèles mathématiques*. Editions MIR, 1980.
- J. S. LEE, B. M. WEON, J. H. JE et K. FEZZAA : How does an air film evolve into a bubble during drop impact ? *Phys. Rev. Lett.*, 109:204501, Nov 2012.
- D. LEGUILLON : Une singularité logarithmique pour un problème non homogène : la singularité épine. Mémoire HDR, 1993.
- S. LEGUÉDOIS, O. PLANCHON, C. LEGOUT et Y. LE BISSONNAIS : Splash projection distance for aggregated soils. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, p. 30–37, 2005.
- M. B. LESSER et J. E. FIELD : The impact of compressible liquids. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 15(1):97–122, 1983.
- J. LI : Calcul d’interface affine par morceaux. *Comptes rendus de l’Académie des sciences. Série II, Mécanique, physique, chimie, astronomie*, 320(8):391–396, 1995.
- L.-H. LUU et Y. FORTERRE : Drop impact of yield-stress fluids. *Journal of Fluid Mechanics*, 632(1):301–327, 2009.
- L. MAHADEVAN et Y. POMEAU : Rolling droplets. *Physics of Fluids (1994-present)*, 11(9):2449–2453, 1999.
- S. MANDRE, M. MANI et M. P. BRENNER : Precursors to splashing of liquid droplets on a solid surface. *Physical review letters*, 102(13):134502, 2009.
- S. MANGILI, C. ANTONINI, M. MARENGO et A. AMIRFAZLI : Understanding the drop impact phenomenon on soft pdms substrates. *Soft Matter*, 8:10045–10054, 2012.
- M. MANI, S. MANDRE et M. P. BRENNER : Events before droplet splashing on a solid surface. *Journal of Fluid Mechanics*, 647(-1):163–185, 2010.

- H. J. MELOSH et B. A. IVANOV : Impact crater collapse. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, 27(1):385–415, 1999.
- H. MIRELS : laminar boundary layer behind shock advancing into stationary fluid. *NACA*, TN 3401:25p, mar 1955.
- A. MOMBER : Deformation and fracture of rocks due to high-speed liquid impingement. *International Journal of Fracture*, 130(3):683–704, 2004.
- C. MUNDO, M. SOMMERFELD et C. TROPEA : Droplet-wall collisions : Experimental studies of the deformation and breakup process. *International Journal of Multiphase Flow*, 21(2):151 – 173, 1995.
- M. A. NEARING, J. M. BRADFORD et R. D. HOLTZ : Measurement of force vs. time relations for waterdrop impact. *Soil Science Society of America Journal*, p. 1532–1536, 1986.
- W. NETHERCOTE, M. MACKAY et B. MENON : *Some warship slamming investigations*. Defence Research Establishment Atlantic, 1986.
- S. NIGEN : Experimental investigation of the impact of an (apparent) yield-stress material. *Atomization and Sprays*, 15(1):103–118, 2005.
- J. M. OLIVER : Second-order wagner theory for two-dimensional water-entry problems at small deadrise angles. *J. Fluid Mech.*, 572:59–86, 2007.
- J. M. OLIVER : *Water entry and related problems*. Thèse de doctorat, University of Oxford, 2002.
- M. PASANDIDEH-FARD, Y. M. QIAO, S. CHANDRA et J. MOSTAGHIMI : Capillary effects during droplet impact on a solid surface. *Physics of Fluids (1994-present)*, 8(3):650–659, 1996.
- R. E. PEPPER, L. COURBIN et H. A. STONE : Splashing on elastic membranes : The importance of early-time dynamics. *Physics of Fluids (1994-present)*, 20(8):082103, 2008.
- D. H. PEREGRINE : Flow due to a vertical plate moving in a channel. unpublished notes, 1972.
- J. PHILIPPI, P.-Y. LAGRÉE et A. ANTKOWIAK : Drop impact on a solid surface : short time self-similarity. <http://arxiv.org/abs/1504.05847>, 2015.
- K. POHLHAUSEN : Zur näherungsweisen integration der differentialgleichung der laminaren grenzsicht. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 1(4):252–290, 1921.

- S. POPINET : Gerris : a tree-based adaptive solver for the incompressible euler equations in complex geometries. *Journal of Computational Physics*, 190(2):572 – 600, 2003.
- S. POPINET : An accurate adaptive solver for surface-tension-driven interfacial flows. *Journal of Computational Physics*, 228(16):5838–5866, 2009.
- C. POZRIKIDIS : *Introduction to theoretical and computational fluid dynamics*. Oxford University press, 1997.
- C. POZRIKIDIS : *A Practical guide to boundary elements method*. Chapman & Hall/CRC, 2002.
- A. PROSPERETTI et H. N. OGUZ : The impact of drops on liquid surfaces and the underwater noise of rain. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 25(1):577–602, 1993.
- H. R. PRUPPACHER et K. V. BEARD : A wind tunnel investigation of the internal circulation and shape of water drops falling at terminal velocity in air. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 96(408):247–256, 1970.
- H. C. PUMPHREY et P. A. ELMORE : Entrainment of bubbles by drop impacts. *Journal of Fluid Mechanics*, 220:539–567, 1990.
- A. PUTZ, I. FRIGAARD et D. MARTINEZ : On the lubrication paradox and the use of regularisation methods for lubrication flows. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 163(1–3):62 – 77, 2009.
- L. RAYLEIGH : Xxiii. hydrodynamical notes. *Philosophical Magazine Series 6*, 21(122): 177–195, 1911.
- M. REIN : Phenomena of liquid drop impact on solid and liquid surfaces. *Fluid Dynamics Research*, 12(2):61–93, 1993.
- Y. RENARDY, S. POPINET, L. DUCHEMIN, M. RENARDY, S. ZALESKI, C. JOSSERAND, M. A. DRUMRIGHT-CLARKE, D. RICHARD et D. QUÉRÉ : Pyramidal and toroidal water drops after impact on a solid surface. *J. Fluid Mech.*, 484:69–83, 2003.
- S. N. REZNIK et A. L. YARIN : Spreading of a viscous drop due to gravity and capillarity on a horizontal or an inclined dry wall. *Physics of Fluids*, 14(1):118–132, 2002.
- G. RIBOUX et J. M. GORDILLO : Experiments of drops impacting a smooth solid surface : A model of the critical impact speed for drop splashing. *Phys. Rev. Lett.*, 113:024507, Jul 2014.
- G. RIBOUX et J. M. GORDILLO : The diameters and velocities of the droplets ejected after splashing. *Journal of Fluid Mechanics*, 772:630–648, 6 2015.

- D. RICHARD et D. QUÉRÉ : Bouncing water drops. *EPL (Europhysics Letters)*, 50 (6):769–775, 2000.
- R. RIOBOO, M. MARENGO et C. TROPEA : Time evolution of liquid drop impact onto solid, dry surfaces. *Experiments in Fluids*, 33(1):112–124, 2002.
- R. RIOBOO, C. TROPEA et M. MARENGO : Outcomes from a drop impact on solid surfaces. *Atomization and Sprays*, 11(2), 2001.
- A. ROBERTS : Transient free-surface flows generated by a moving vertical plate. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 40(1):129–158, 1987.
- F. RODRIGUEZ et R. MESLER : The penetration of drop-formed vortex rings into pools of liquid. *Journal of colloid and interface science*, 121(1):121–129, 1988.
- A. ROZHKOVA, B. PRUNET-FOCH et M. VIGNES-ADLER : Impact of water drops on small targets. *Physics of Fluids*, 14(10):3485–3501, 2002.
- A. ROZHKOVA, B. PRUNET-FOCH et M. VIGNES-ADLER : Dynamics of a liquid lamella resulting from the impact of a water drop on a small target. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 460 (2049):2681–2704, 2004.
- F. SAVART : Mémoire sur le choc d’une veine liquide lancée contre un plan circulaire. *Ann. chim*, 54:56–87, 1833a.
- F. SAVART : Suite du mémoire sur le choc d’une veine liquide lancée contre un plan circulaire. *Ann. chim*, 54:113–145, 1833b.
- R. SCARDOVELLI et S. ZALESKI : Direct numerical simulation of free-surface and interfacial flow. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 31(1):567–603, 1999.
- H. SCHLICHTING : *Boundary-layer theory*. McGraw-Hill series in mechanical engineering. McGraw-Hill, New York, 1968.
- Š. ŠIKALO, H.-D. WILHELM, I. V. ROISMAN, S. JAKIRLIĆ et C. TROPEA : Dynamic contact angle of spreading droplets : Experiments and simulations. *Physics of Fluids (1994-present)*, 17(6):–, 2005.
- F. T. SMITH, L. LI et G. X. WU : Air cushioning with a lubrication/inviscid balance. *J. Fluid Mech.*, 482:291–318, 5 2003.
- I. N. SNEDDON : The elementary solution of dual integral equations. *Glasgow Mathematical Journal*, 4:108–110, 1 1960.
- I. N. SNEDDON : *Fourier Transforms*. Dover, 1995.

- D. SOTO, A. B. DE LARIVIÈRE, X. BOUTILLON, C. CLANET et D. QUÉRÉ : The force of impacting rain. *Soft matter*, 2014.
- L. STARON, P.-Y. LAGRÉE, P. RAY et S. POPINET : Scaling laws for the slumping of a bingham plastic fluid. *Journal of Rheology (1978-present)*, 57(4), 2013.
- S. STEBNOVSKII : Characteristics in the initial stage of the spreading of a drop on a solid surface. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 20(1):66–69, 1979.
- C. S. STEVENS : Scaling of the splash threshold for low-viscosity fluids. *EPL (Europhysics Letters)*, 106(2):24001, 2014.
- C. S. STEVENS, A. LATKA et S. R. NAGEL : Comparison of splashing in high- and low-viscosity liquids. *Phys. Rev. E*, 89:063006, Jun 2014.
- K. STEWARTSON : *The Theory of Laminar Boundary Layers in Compressible Fluids*. (Oxford Mathematical Monographs), Clarendon Press, 1964.
- C. D. STOW et M. G. HADFIELD : An experimental investigation of fluid flow resulting from the impact of a water drop with an unyielding dry surface. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 373(1755): 419–441, 01 1981.
- C. D. STOW et R. D. STAINER : The physical products of a splashing water drop. *Journal of the Meteorological Society of Japan. Ser. II*, 55(5):518–532, 1977.
- G. TAYLOR et L. HOWARTH : The dynamics of thin sheets of fluid. i. water bells. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 253(1274):289–295, 1959.
- J. THOMSON et H. NEWALL : On the formation of vortex rings by drops falling into liquids, and some allied phenomena. *Proceedings of the royal society of London*, 39 (239-241):417–436, 1885.
- M.-J. THORAVAL : *Drop impact splashing and air entrapment*. Thèse de doctorat, King Abdullah University of Science and Technology, 2013.
- M.-J. THORAVAL, K. TAKEHARA, T. G. ETOH, S. POPINET, P. RAY, C. JOSSERAND, S. ZALESKI et S. T. THORODDSEN : von kármán vortex street within an impacting drop. *Phys. Rev. Lett.*, 108:264506, Jun 2012.
- S. T. THORODDSEN, T. G. ETOH, K. TAKEHARA, N. OOTSUKA et Y. HATSUKI : The air bubble entrapped under a drop impacting on a solid surface. *J. Fluid Mech.*, 545:203–212, 12 2005.

- S. T. THORODDSEN, M.-J. THORAVAL, K. TAKEHARA et T. G. ETOH : Droplet splashing by a slingshot mechanism. *Phys. Rev. Lett.*, 106:034501, Jan 2011.
- S. THORODDSEN, T. ETOH et K. TAKEHARA : High-speed imaging of drops and bubbles. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 40(1):257–285, 2008.
- D. B. van DAM et C. LE CLERC : Experimental study of the impact of an ink-jet printed droplet on a solid substrate. *Physics of Fluids (1994-present)*, 16(9):3403–3414, 2004.
- M. D. VAN DYKE : *Perturbation methods in fluid dynamics*. Parabolic Press, 1975.
- C. VERNAY, L. RAMOS et C. LIGOURE : Free radially expanding liquid sheet in air : time- and space-resolved measurement of the thickness field. *Journal of Fluid Mechanics*, 764:428–444, 2 2015.
- E. VILLERMAUX et B. BOSSA : Drop fragmentation on impact. *J. Fluid Mech.*, 668:412–435, 2 2011.
- O. VOINOV : Hydrodynamics of wetting. *Fluid Dynamics*, 11(5):714–721, 1976.
- H. WAGNER : Über stoß- und gleitvorgänge an der oberfläche von flüssigkeiten. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 12(4):193–215, 1932.
- A.-B. WANG, C.-C. KUAN et P.-H. TSAI : Do we understand the bubble formation by a single drop impacting upon liquid surface? *Physics of Fluids (1994-present)*, 25(10):101702, 2013.
- E. WATSON : The radial spread of a liquid jet over a horizontal plane. *Journal of Fluid Mechanics*, 20(03):481–499, 1964.
- D. A. WEISS et A. L. YARIN : Single drop impact onto liquid films : neck distortion, jetting, tiny bubble entrainment, and crown formation. *J. Fluid Mech.*, 385:229–254, 1999.
- I. A. WHALLEY : Project upkeep—a review of the wwii dambuster weapon. In *Proc. 38th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conf. Exhibit. American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., Indianapolis, IN*, 2002.
- S. K. WILSON : *The mathematics of ship slamming*. Thèse de doctorat, Oxford University, 1989.
- A. M. WORTHINGTON : A second paper on the forms assumed by drops of liquids falling vertically on a horizontal plate. *Proceedings of the Royal Society of London*, 25:pp. 498–503, 1876.

- A. M. WORTHINGTON : On impact with a liquid surface. *Proceedings of the Royal Society of London*, 34(220-223):217–230, 1882.
- A. M. WORTHINGTON : *A study of splashes*. Longmans, Green, and Co., 1908.
- A. M. WORTHINGTON et R. S. COLE : Impact with a liquid surface, studied by the aid of instantaneous photography. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 189:pp. 137–148, 1897.
- L. XU, L. BARCOS et S. R. NAGEL : Splashing of liquids : Interplay of surface roughness with surrounding gas. *Phys. Rev. E*, 76:066311, 2007.
- L. XU, W. W. ZHANG et S. R. NAGEL : Drop splashing on a dry smooth surface. *Physical Review Letters*, 94(18):184505–4, 2005.
- A. L. YARIN : Drop impact dynamics : Splashing, spreading, receding, bouncing... *Annual Review of Fluid Mechanics*, 38(1):159–192, 2006.
- A. L. YARIN et D. A. WEISS : Impact of drops on solid surfaces : self-similar capillary waves, and splashing as a new type of kinematic discontinuity. *J. Fluid Mech.*, 283:141–173, 1995.